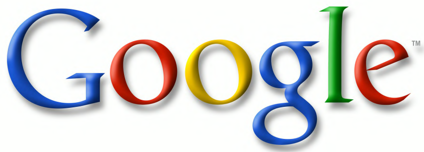


Alexander Ziwet

118

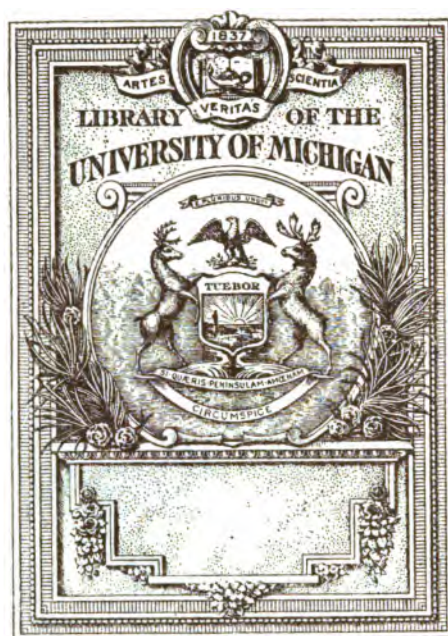
Grundzüge
der
Einsteinschen Relativitätstheorie

von

Dr. August Kopff
a. o. Professor der Astronomie
an der Universität Heidelberg



Verlag von S. Hirzel in Leipzig


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


Google

118

Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie

Alexander Ziwet

Grundzüge

der

Einsteinschen Relativitätstheorie

von

Dr. August Kopff
a. o. Professor
der Astronomie an der Universität Heidelberg



Verlag von S. Hirzel in Leipzig 1921

Vorwort.

Die nachfolgende Einführung in die Einsteinsche Relativitätstheorie ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die im Wintersemester 1919—20 und Sommersemester 1920 an der Universität Heidelberg gehalten wurden.

Sie sucht in möglichst einfacher Weise die grundlegenden Untersuchungen über diese Theorie wiederzugeben, wobei auf eine mathematische Darstellung des Gegenstandes nicht verzichtet werden konnte. Ohne ein tieferes Eindringen in die mathematischen Probleme der Relativitätstheorie kann man deren Gedankengänge niemals wirklich verstehen. Die Relativitätstheorie gehört der theoretischen Physik im weitesten Sinne an, und diese ist mathematische Beschreibung der physikalischen Naturvorgänge.

Dem Zweck des Buches entsprechend — eine erste Einführung zu geben — umfassen die vorausgesetzten Kenntnisse in Mathematik und Physik etwa diejenigen, die an den Hochschulen in den ersten Semestern erworben werden.

Daß ein Astronom es unternommen hat, eine solche Einführung zu schreiben, dürfte nicht weiter wundernehmen. Denn die Relativitätstheorie ist ebensosehr eine Angelegenheit der Astronomie wie der Physik, nicht nur deshalb, weil die Nachweise über ihre Gültigkeit augenblicklich gerade auf astronomischem Gebiet liegen.

Heidelberg-Königstuhl, Februar 1921.

A. Kopff.

Inhaltsverzeichnis.

Literatur.

A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. Sammlung Vieweg. Heft 38.

A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916. (Zugleich Sonderdruck aus den Annalen der Physik Bd. 49, 1916. Abdruck auch in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 3. Aufl. Leipzig 1920.)

M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Berlin 1920.

E. Freundlich, Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin 1920.

H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Berlin 1920.

M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip. 2. Aufl. „Die Wissenschaft" Bd. 38. Braunschweig 1913. Die 3. Aufl. ist unter dem Titel erschienen: Die Relativitätstheorie. Erster Band: Das Relativitätsprinzip der Lorentz-Transformation. Braunschweig 1919.

W. Bloch, Einführung in die Relativitätstheorie. Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 618.

W. de Sitter, On Einsteins theory of gravitation, and its astronomical consequences (1.—3. paper). Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London 1916, 1917.

Die vorstehende Auswahl aus der Literatur wird durch die Fußnoten des Textes ergänzt. Ausführlichere Literaturangaben finden sich in den Büchern von H. Weyl und M. v. Laue.

Nachträglich ist erschienen:

M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen. Berlin 1920.

Einleitung.

Bei einer ersten Beschäftigung mit der Relativitätstheorie läuft man leicht Gefahr, sich allzusehr in Einzelheiten zu verlieren und die prinzipiellen Fragen zu übersehen. Für das Studium des Folgenden bedeutet es deshalb vielleicht eine Erleichterung, wenn wir versuchen, die grundlegenden Gedankengänge herauszuheben, soweit dies ohne mathematische Hilfsmittel möglich ist. Hierbei muß freilich manches gesagt werden, was sich späterhin noch einmal wiederholt.

An die Spitze der Physik stellt die Relativitätstheorie den Satz: Alle Bewegungen in der Natur sind solche von Massen oder Energien gegeneinander; alle Bewegungsvorgänge sind also relative (Relativitätsprinzip). Wir treten damit in Gegensatz zur klassischen Physik, welche absolute und relative Bewegungen kennt. Erinnern wir uns an einige einfache Beispiele. Eine relative Bewegung ist diejenige eines gleichmäßig geradeaus fahrenden Eisenbahnzuges gegen die Umgebung, oder allgemeiner, die geradlinige und gleichförmige Bewegung einer Masse gegen eine Bezugsmasse. Wir können das Koordinatensystem, auf welches wir die Beschreibung beziehen, in die Bezugsmasse oder die bewegte Masse legen und erhalten in beiden Fällen eine gleichlautende Beschreibung für den Bewegungsvorgang.

Anders liegen dagegen die Verhältnisse nach Auffassung der klassischen Mechanik bei der Rotationsbewegung. Rotiert ein Körper gegen ein Koordinatensystem, in welchem das Galileische Trägheitsgesetz gilt (Galileisches Koordinatensystem), so treten Zentrifugalkräfte auf, wobei es gleichgültig ist, ob in der Umgebung des Körpers sich ruhende Massen befinden oder nicht. Ruht dagegen der zentrale Körper, und rotieren die Massen der Umgebung um ihn, so fehlen die Zentrifugalkräfte. Eine Vertauschung von rotierender, zentraler Masse und den Massen der Umgebung (Be-

zugsmassen) führt also zu verschiedenen Bewegungserscheinungen. Die Rotation ist eine absolute Bewegung.

Dasselbe gilt für die Beschleunigung. Besitzt ein Massenpunkt eine gewisse Beschleunigung gegen eine Bezugsmasse, die in einem Galileischen Koordinatensystem ruht, so ist eine Vertauschung von bewegter Masse und Bezugsmasse wiederum nicht ausführbar, ohne daß zugleich die Beschreibung des Bewegungsvorganges eine Änderung erfährt. Denn legen wir das Koordinatensystem in den beschleunigten Massenpunkt, so wird das Koordinatensystem selbst ein beschleunigtes, und in ihm gelten andere Bewegungsgesetze als im Galileischen System.

Auch in Elektrizität und Optik kennt die klassische Physik absolute Bewegungen, nämlich solche gegen den ruhenden Äther. Das mit ihm fest verbundene Koordinatensystem stellt ein bevorzugtes System dar.

Nun haben wir aber noch niemals in der Natur absolute Bewegungen (also Bewegungen gegen den Raum schlechthin) beobachtet. Jede Rotation, die wir wahrnehmen, jede Beschleunigung erfolgt gegen irgendwelche Massen. Noch niemals ist der Nachweis für die Existenz des Äthers gelungen. Das physikalische Weltbild wäre einfacher und der Wirklichkeit entsprechender, wenn wir alle Bewegungen als relative deuten könnten. Das hat wohl vor Einstein am deutlichsten E. Mach ausgesprochen. Es sei nur an seine Ausführungen über die Rotation erinnert[1]).

„Für mich gibt es überhaupt nur eine relative Bewegung und ich kann darin einen Unterschied zwischen Rotation und Translation nicht machen. Dreht sich ein Körper relativ gegen den Fixsternhimmel, so treten Fliehkräfte auf, dreht er sich relativ gegen einen andern Körper, nicht aber gegen den Fixsternhimmel, so fehlen die Fliehkräfte. Ich habe nichts dagegen, daß man die erstere Rotation eine absolute nennt, wenn man nur nicht vergißt, daß dies nichts anderes heißt, als eine relative Drehung gegen den Fixsternhimmel. Können wir vielleicht das Wasserglas Newtons festhalten, den Fixsternhimmel dagegen rotieren, und das Fehlen der Fliehkräfte nun nachweisen?

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. 5. Aufl. Leipzig 1904. S. 252.

Der Versuch ist nicht nachweisbar, der Gedanke überhaupt sinnlos, da beide Fälle sinnlich voneinander nicht zu unterscheiden sind. Ich halte demnach beide Fälle für denselben Fall und die Newtonsche Unterscheidung für eine Illusion."

Hier ist das Ziel einer Relativitätstheorie bereits erkannt, doch sie durchzuführen hat erst Albert Einstein vermocht, wenn sie auch freilich heute noch lange nicht zu Ende geführt ist, und wir nicht einmal sagen können, wohin sie uns schließlich bringen wird.

Aber was bereits vollendet vorliegt, spricht zu ihren Gunsten. 1905 setzten die Untersuchungen Einsteins über den spezielleren Fall der Relativität aller geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen in Mechanik und Elektrizität ein, die für uns nun Vorbereitungen für die Untersuchungen über die Relativität aller Bewegungen bedeuten. Diese letzteren sind — wiederum von Einstein — in den Jahren 1915—1918 zu einem gewissen Abschluß gebracht worden.

Es mußten, gestützt auf den Relativitätsgedanken, Naturgesetze aufgestellt werden, die sich nicht, wie die Newtonschen oder Maxwellschen Gleichungen, auf bevorzugte Koordinatensysteme beschränken, sondern die für jedes beliebig bewegte System unverändert gelten. Die mathematischen Hilfsmittel hierfür waren bereits in der allgemeinen Tensoranalysis gegeben.

Diese Naturgesetze führten mit Notwendigkeit, wie eine einfache Überlegung zeigt, zu einer Theorie der Gravitation. Denn soll z. B. die Bewegung eines fallenden Steines gegen die Erde eine relative sein, so müssen wir die Beschreibung des Bewegungsvorganges sowohl in bezug auf die Erde als auch in bezug auf den Stein geben können, und in beiden Fällen muß die Beschreibung dieselbe sein. „Der Stein bewegt sich beschleunigt im ruhenden Gravitationsfeld der Erde", oder „der Stein ruht im beschleunigten, gravitationsfreien Koordinatensystem der Erde" sind die beiden gleichlautenden Beschreibungen. Sie führen dazu, alle Bewegungsvorgänge im ruhenden Gravitationsfeld denen im beschleunigt bewegten, gravitationsfreien System gleichzusetzen (Einsteinsches Äquivalenzprinzip).

Die für beliebig bewegte Koordinatensysteme unveränderlichen Bewegungsgesetze führen so zu Gesetzen für die unter dem Einfluß der Gravitation stattfindende Bewegung. Die Gravitation

ist hierbei als etwas Besonderes aus dem Kreis der übrigen Kräfte herausgehoben. Überall in unserem mit Materie erfüllten Raum sind Gravitationsfelder. Das Vorhandensein der Gravitationsenergie wird damit zur physikalischen Eigenschaft des Raumes.

Vieles Neue und Ungewohnte haben diese Untersuchungen zur Folge gehabt. Die Vorstellung des Äthers als einer überall ruhenden, alles durchdringenden Substanz hat fallen müssen. Materie und elektromagnetische Energie sind miteinander identisch. Räumliche und zeitliche Größen sind von der Bewegung des Koordinatensystems abhängig, und damit infolge des Äquivalenzprinzips auch abhängig vom Gravitationsfeld, auf das wir sie beziehen. Die geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit bestehen nicht an und für sich, sondern nur in bezug auf die im Raum vorhandene Materie.

So hat die Relativitätstheorie die bisher getrennten Begriffe Raum, Zeit, Materie in wunderbarer Weise zu einem physikalischen Weltbild von außerordentlicher Einfachheit zusammengefaßt: Materie und elektromagnetische Energie sind eine Einheit geworden, und diese bestimmt überall die physikalischen Eigenschaften des Raumes zu jeder Zeit (das Gravitationsfeld) und zugleich die Metrik von Raum und Zeit.

Im einzelnen ist das Relativitätsprinzip in seiner allgemeinsten Form noch lange nicht erschöpft. Durchgeführt ist die Relativitätstheorie erst, soweit die Gravitationskräfte im Sinne der klassischen Mechanik dabei in Frage kommen. Und auch für diesen Teil der Physik ist noch nicht gezeigt, daß alle Erscheinungen, die wir in der Natur wahrnehmen, den Forderungen der Relativitätstheorie gemäß auftreten. Dieses Ziel ist ja auch durch die wissenschaftliche Arbeit einiger Jahre gar nicht zu erreichen.

Das bisher Errungene ist aber doch von solcher Bedeutung, daß wir beim Rückblick auf die Theorien der klassischen Physik uns wohl der Worte C. Neumanns[1]) erinnern dürfen:

„So hoch und vollendet eine Theorie auch dastehen mag, immer werden wir gezwungen sein, von ihren Prinzipien uns aufs genaueste Rechenschaft abzulegen. Immer werden wir im Auge

[1]) C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig 1870.

behalten müssen, daß diese Prinzipien etwas Willkürliches und folglich etwas Bewegliches sind; damit wir womöglich in jedem Augenblick übersehen können, welche Wirkung eine Änderung dieser Prinzipien auf die ganze Gestaltung der Theorie ausüben würde; und zur rechten Zeit eine solche Änderung eintreten zu lassen imstande sind; damit wir (mit einem Wort) die Theorie vor einer Versteinerung, vor einer Erstarrung zu bewahren imstande sind, welche nur verderblich, für den Fortschritt der Wissenschaft nur hinderlich sein kann."

Erster Teil.

Spezielle Relativitätstheorie.

§ 1. Das Galileische Relativitätsprinzip. Die Prinzipe der Relativitätstheorie.

Schon die klassische Mechanik kennt ein Relativitätsprinzip, dessen genauere Betrachtung uns unmittelbar zu der Problemstellung der Einsteinschen Relativitätstheorie hinführt.

Das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik wird in einem Cartesischen Koordinatensystem — es sei stets ein rechtshändiges System zugrunde gelegt — durch drei Differentialgleichungen dargestellt:

$$(1) \qquad X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

X, Y, Z sind die Komponenten einer auf die Masse m wirkenden Kraft, die zweiten Ableitungen der Koordinaten x, y, z nach der Zeit sind die Beschleunigungskomponenten dieser Masse. Das Koordinatensystem K, für welches die Gleichungen (1) die Beschreibung der Bewegung von m geben, wird als ruhendes oder Galileisches bezeichnet. In ihm wird, wie aus den Grundgleichungen hervorgeht, ein Massenpunkt, auf den keine äußere Kraft wirkt, entweder ruhen oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegen. Die Gültigkeit des Galileischen Trägheitsgesetzes ist also an das Galileische Koordinatensystem K gebunden.

Wir legen uns nun die Frage vor: Was wird aus dem mechanischen Grundgesetz (und dem Trägheitsgesetz), wenn wir die Bewegungsvorgänge nicht mehr auf ein „ruhendes" Koordinatensystem beziehen?

Für einen im Anfangspunkt unseres ruhenden Bezugssystems K sich befindenden Beobachter B sind die Gleichungen (1) maßgebend. Nun möge B selbst relativ zu K eine beliebige Bewegung aus-

führen. Wir suchen die Gleichungen, die an Stelle von (1) die Bewegung von m in bezug auf den Beobachter B beschreiben. Wir verbinden mit B als Koordinatenanfangspunkt ein zweites Cartesisches System K' (Koordinaten: x', y', z'), dessen Achsen denen von K parallel seien. x_0, y_0, z_0 stelle den Ort von B im System K zu irgendeiner Zeit dar; sie sind beliebige Funktionen der Zeit.

Dann ist:

$$x' = x - x_0\,, \qquad y' = y - y_0\,, \qquad z' = z - z_0\,, \tag{2}$$

woraus folgt:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\,, \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\,, \qquad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\,. \tag{3}$$

Die Gleichungen (3) bezeichnet man als das Additionstheorem der Geschwindigkeiten der klassischen Mechanik. Die Geschwindigkeit in bezug auf K ist die Summe der Geschwindigkeit in bezug auf K' und der Geschwindigkeit von K' gegen K.

Für die Beschleunigungen ergibt sich entsprechend:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}\,, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_0}{dt^2}\,, \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z_0}{dt^2}\,. \tag{4}$$

Die wirkende Kraft ist vom Koordinatensystem unabhängig, ihre Komponenten bleiben im System K' dieselben wie in K[1]) (d. h. $X' = X$ usw.), so daß die Bewegung von m im Bezugssystem K' beschrieben wird durch:

$$X' - m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2x_0}{dt^2}\,, \qquad Y' - m\frac{d^2y'}{dt^2} = m\frac{d^2y_0}{dt^2}\,, \tag{5}$$

$$Z' - m\frac{d^2z'}{dt^2} = m\frac{d^2z_0}{dt^2}\,.$$

Mechanisches Grundgesetz sowohl wie Trägheitsgesetz haben ihre Gültigkeit verloren. Bei bekannter äußerer Kraft X', Y', Z' ist es dem Beobachter B möglich, durch mechanische Messungen im System K' den Betrag seiner Beschleunigung gegen das ruhende System festzustellen.

Ist jedoch die Bewegung von B (d. h. von K' gegen K) geradlinig und gleichförmig, also:

$$x_0 = ut\,, \qquad y_0 = vt\,, \qquad z_0 = wt\,, \tag{6}$$

[1]) M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. Leipzig 1916. S. 71.

wo u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten von B darstellen, so geht (5) über in:

$$(7) \quad X' - m\frac{d^2x'}{dt^2} = 0\,, \qquad Y' - m\frac{d^2y'}{dt^2} = 0\,, \qquad Z' - m\frac{d^2z'}{dt^2} = 0\,.$$

Mechanisches Grundgesetz und Trägheitsgesetz bleiben nun auch in K' bestehen. Für den Beobachter B besteht keine Möglichkeit, durch Messungen in K' die Geschwindigkeit seiner eigenen Bewegung zu ermitteln.

Das mechanische Grundgesetz beschreibt also die Bewegung von m nicht nur in einem ruhenden System, sondern in jedem anderen, das sich relativ zu diesem in gleichförmiger Translation befindet. K' ist ebenfalls ein Galileisches Koordinatensystem und kann als ruhend aufgefaßt werden.

Die Gleichungen (1) gehen in sich selbst über, wenn man auf sie die „Galilei-Transformation":

$$(8) \qquad x' = x - ut\,, \qquad y' = y - vt\,, \qquad z' = z - wt$$

anwendet; hierbei ist noch als Identität angenommen:

$$(8') \qquad t' = t\,,$$

also vorausgesetzt, daß die Zeit als unabhängige Variable in beiden Systemen dieselbe unabhängige Größe sei. Die Grundgleichungen der Mechanik sind mit anderen Worten in bezug auf die Galilei-Transformation invariant[1]).

Diese Invarianz der Gleichungen (1) ist nicht eine rein formale mathematische Eigenschaft derselben; sie besitzt vielmehr, wie aus dem Vorhergehenden schon hervorgeht, einen tieferen physikalischen Sinn. Betrachten wir noch einmal ein einfaches Beispiel. Für die Bewegung des Schwerpunktes des Sonnensystems gilt wegen der großen Entfernung der Fixsterne mit ganz erheblicher Annäherung das Trägheitsgesetz. Es ist also für die Anwendung der allgemeinen Bewegungsgleichungen (1) völlig gleichgültig, ob

[1]) Eine Gleichung oder ein Ausdruck ist invariant in bezug auf eine Reihe von Koordinatensystemen, wenn für jedes dieser Systeme dieselbe Form bestehen bleibt; eine Größe, die in jedem System denselben Wert behält, heißt eine Invariante. Jede Angabe über Invarianz hat nur dann einen Sinn, wenn die Gruppe von Koordinatensystemen, auf welche sie sich bezieht, definiert ist. Dies geschieht durch Festsetzung der Transformationsgleichungen, durch welche die Systeme ineinander übergehen.

das System als Ganzes ruht oder sich in gleichförmiger Translation befindet. Keine mechanische Messung innerhalb des Sonnensystems vermag zugunsten der einen oder anderen Möglichkeit zu entscheiden. Wir beobachten lediglich relative Bewegungen innerhalb des Systems und können nichts über dessen absolute Bewegung im Raum aussagen. Auch wenn die Fixsternbeobachtungen ergeben haben, daß das Sonnensystem sich geradlinig und gleichförmig gegen das Fixsternsystem bewegt, so ist damit wieder nur eine Relativbewegung festgestellt. Die Eigenschaft der Invarianz des mechanischen Grundgesetzes in bezug auf die Galilei-Transformation ist also identisch mit der Aussage: bei allen Bewegungen von Massen, die wir beobachten, bleibt ein nach Größe und Richtung konstanter Teil unbestimmt. Die Natur zeigt uns nur relative Bewegungen von Massen gegeneinander, keine absoluten Bewegungen (d. h. keine Bewegungen gegen ein besonders ausgezeichnetes Koordinatensystem), wenigstens soweit gleichförmige Translationen in Frage kommen.

Diese grundlegende Bedeutung der Invarianzeigenschaft führt dazu, sie als ein Prinzip der Mechanik, als das Galilei-Newtonsche Relativitätsprinzip zu bezeichnen.

Wir können es so formulieren:

Das Grundgesetz, nach welchem die Vorgänge in einem mechanischen System erfolgen, ist unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translation sich befindenden Koordinatensystemen diese Vorgänge bezogen werden.

Oder in mathematischer Fassung:

Die Grundgleichungen, welche die mechanischen Naturvorgänge beschreiben, sind gegen die Galilei-Transformation (8) invariant.

Zwei Bemerkungen verschiedener Art seien hier eingeschaltet.

Die kinetische Energie einer sich bewegenden Masse m ist definiert durch $E = \frac{1}{2} m v^2$, wo v die Geschwindigkeit von m bedeutet. E ist also in den beiden gleichberechtigten Galileischen Systemen K und K', die durch Gleichungen (6) miteinander verbunden sind, verschieden; es gibt immer ein solches System, für welches $E = 0$ ist. In ihm ruht die Masse m. Diese Abhängigkeit der Größe der Energie einer Masse von der Wahl des Koordinatensystems ist deshalb so bemerkenswert, weil in der zu entwickelnden

Relativitätstheorie analoge Abhängigkeiten auftreten werden, die vielfach befremdend erschienen sind.

Ein zweites. Wir können den vorhergehenden Ausführungen eine mathematisch bedeutend einfachere Darstellung geben, wenn wir uns der Ausdrucksweise der Vektorenrechnung bedienen.

Wir verstehen unter einem Vektor eine Größe, welcher sowohl ein bestimmter Wert als auch eine eindeutig gegebene Richtung zukommt; er ist also darstellbar durch eine gerichtete Strecke. Die Richtung muß in bezug auf irgendein Koordinatensystem gegeben sein. Wir bezeichnen die Vektoren durch deutsche Buchstaben. Ein Vektor ist also die Kraft $\mathfrak{K}$, die Entfernung $\mathfrak{r}$ eines Punktes vom Koordinatenanfang, die Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, die Beschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$. Eine Größe, deren Wert durch eine absolute Zahl unabhängig von jedem Koordinatensystem gegeben ist, die keine Richtung besitzt, heißt Skalar oder Invariante; sie wird durch lateinische Buchstaben bezeichnet. Ein Skalar ist z. B. die Masse m. Sind von Punkt zu Punkt bestimmte Skalare oder Vektoren gegeben, so spricht man von einem skalaren oder Vektorfeld.

Wir können einen Vektor nach irgendeinem gegebenen Koordinatensystem in Komponenten zerlegen, wobei wir vorerst stets ein rechtshändiges Cartesisches System zugrunde legen. Die Komponenten eines vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektors sind identisch mit den rechtwinkligen Koordinaten seines Endpunktes. Die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ oder auch a_1, a_2, a_3; den absoluten Wert mit $|\mathfrak{a}|$ oder a. $|\mathfrak{a}|$ ist ein Skalar. Vielfach nennt man auch die drei Größen $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ insgesamt einen Vektor.

Es ist:

(9) $$|\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2}\,.$$

Die Richtung des Vektors ist in einem gegebenen System festgelegt durch:

(10) $$\cos\alpha_1 = \frac{\mathfrak{a}_x}{|\mathfrak{a}|}, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{\mathfrak{a}_y}{|\mathfrak{a}|}, \qquad \cos\alpha_3 = \frac{\mathfrak{a}_z}{|\mathfrak{a}|}.$$

Umgekehrt sind die Komponenten darstellbar durch:

(11) $$\mathfrak{a}_x = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_1\,, \qquad \mathfrak{a}_y = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_2\,, \qquad \mathfrak{a}_z = |\mathfrak{a}|\cos\alpha_3\,.$$

Die Komponenten eines Vektors bleiben bei einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems ungeändert, bei einer Drehung transformieren sie sich wie die Koordinaten eines Punktes. Sie besitzen also in jedem gedrehten System andere Werte. Ihre analytische Form (11) dagegen bleibt auch in solchen Systemen dieselbe, die drei Ausdrücke (11) gelten formal für jedes Koordinatensystem. Dabei können $\mathfrak{a}$ bzw. die drei Komponenten beliebige analytische Funktionen sein; im Fall eines Vektorfeldes sind es Funktionen der Koordinaten. Ein Beispiel ist in der linken Seite von (14) und deren Komponentenzerlegung gegeben.

Ist nun ein Vektor $\mathfrak{a}$ null, so sind es auch seine Komponenten und zwar in jedem System. Die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_x = 0\,, \qquad \mathfrak{a}_y = 0\,, \qquad \mathfrak{a}_z = 0 \tag{12}$$

sind demnach invariante Gleichungen in bezug auf alle Cartesischen Systeme, die durch Parallelverschiebung und Drehung auseinander hervorgehen. Sie können in die Gleichung:

$$\mathfrak{a} = 0 \tag{13}$$

zusammengefaßt werden, die unabhängig vom Koordinatensystem für jede Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ gilt.

Setzt man zwei Vektoren einander gleich, so bedeutet dies, daß die Größen nach Betrag und Richtung übereinstimmen. $+\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{a}$ sind zwei Vektoren von gleichem Betrag, aber entgegengesetzter Richtung.

Vektoren von gleicher oder entgegengesetzter Richtung lassen sich addieren, indem man ihre absoluten Werte oder ihre Komponenten addiert. Ebenso können wir einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren durch Multiplikation seines absoluten Betrags oder seiner Komponenten; die Richtung bleibt dabei ungeändert.

Kraft und Beschleunigung sind Vektoren gleicher Richtung; man kann also das Newtonsche Grundgesetz, nach welchem die auf eine Masse wirkende Kraft dieser Masse und der ihr durch die Kraft erteilten Beschleunigung proportional ist, in der Form schreiben:

$$\mathfrak{K} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0\,. \tag{14}$$

Die Komponenten des Vektors $\mathfrak{K} - m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ sind $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$ usw. Die Gleichung (14) ist also identisch mit den drei Newtonschen

Grundgleichungen (1). Die Beziehung (14) stellt dieses Grundgesetz in Vektorform dar. Die drei Komponentengleichungen (1) gelten demnach für jede beliebige Richtung von Kraft und Beschleunigung und für jedes beliebig gedrehte Cartesische Koordinatensystem[1]).

Außerdem aber zeigt die Vektorform (14), daß die Grundgleichungen auch in bezug auf die Galilei-Transformation invariant sind. Denn für ein Koordinatensystem K', das sich geradlinig und gleichförmig gegen K bewegt — und nur für ein solches — bleibt neben der Kraft auch die Beschleunigung nach Größe und Richtung ungeändert.

Wir können aber auch Vektoren addieren, die verschiedene Richtung haben. Wir verfahren nach dem Gesetz des Parallelogramms der Geschwindigkeiten und schreiben symbolisch:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \tag{15}$$

wo die Summe $\mathfrak{c}$ nach Länge und Richtung die Diagonale des aus den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Parallelogramms ist. Nehmen wir eine Zerlegung der Vektoren in Komponenten vor, so müssen wir die entsprechenden Komponenten addieren.

Ist z. B. die Geschwindigkeit eines Punktes im System K durch $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ gegeben, die desselben Punktes in K' durch $\frac{d\mathfrak{r}'}{dt}$ und ist die relative Geschwindigkeit von K' gegen K nun $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$, so erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}. \tag{16}$$

Diese Gleichung ist nach einer Zerlegung in Koordinaten identisch mit (3), stellt also das Additionstheorem der Geschwindigkeiten in Vektorform dar.

Wir kehren nun wieder zu unserem Relativitätsprinzip zurück. Es ist sicher in großer Annäherung richtig. Vermögen doch die

[1]) Man kann sich hiervon auch durch Ausrechnen überzeugen. Für ein gedrehtes Koordinatensystem gehen die Gleichungen in $X' - m\frac{d^2x'}{dt^2} = 0$ usw. über. Vgl. z. B. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. S. 72.

Grundgleichungen (1), welche das Prinzip erfüllen, mit außerordentlicher Schärfe alle mechanischen Bewegungsvorgänge auf der Erde und im Sonnensystem und verwandten Systemen wiederzugeben.

Doch sobald wir uns auf den Boden unseres klassischen Relativitätsprinzips stellen, fühlen wir auch sofort das Unbefriedigende, das in der zweifachen Beschränkung liegt, die ihm anhaftet. Gilt das Relativitätsprinzip nur für mechanische Vorgänge oder auch für solche elektrischer (und optischer) Natur? Bezieht es sich nur auf Koordinatensysteme, die sich gleichförmig und geradlinig zueinander bewegen, oder auch auf beliebig zueinander bewegte Systeme?

Diese beiden Fragen beantworten, heißt: die gesamten Folgerungen aus diesen Fragestellungen ziehen und prüfen, ob das Geschehen in der Natur mit diesen Folgerungen übereinstimmt. Wir haben damit zwei Hypothesen gewonnen, welche die Grundlage unserer physikalischen Naturbeschreibung bilden sollen. Wir sind zu dem speziellen und allgemeinen Relativitätsprinzip von Einstein gelangt. Wir wollen beide zunächst aussprechen, ohne ihnen freilich eine schärfere mathematische Fassung geben zu können.

Das spezielle Relativitätsprinzip lautet: Sind K und K' zwei in bezug zueinander gleichförmig und geradlinig bewegte Koordinatensysteme, so verläuft alles Naturgeschehen (in Mechanik und Elektrizität) in bezug auf K' nach genau denselben allgemeinen Gesetzen wie in bezug auf K.

Bisher hat die Theorie der Elektrizität angenommen, daß ihre Grundgleichungen nur in einem Koordinatensystem, demjenigen des ruhenden Äthers, gelten. Es ist hier also, im Gegensatz zur klassischen Mechanik, ein bevorzugtes System vorhanden. Jede Bewegung gegen dieses kann als absolute Bewegung aufgefaßt werden. Das spezielle Relativitätsprinzip verwirft diese Bevorzugung eines Systems; es wird unsere Aufgabe sein zu untersuchen, ob wir uns hierbei mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung befinden.

Das allgemeine Relativitätsprinzip lautet: Sind K und K' zwei beliebig zueinander bewegte Koordinatensysteme, so gelten in beiden für die Beschreibung aller Naturvorgänge (in Mechanik und Elektrizität) genau dieselben allgemeinen Gesetze.

Auch hier stehen wir im Widerspruch zur Auffassung der bisherigen Theorie. Vergleichen wir z. B. zwei Systeme, ein ruhendes und ein dazu gleichförmig rotierendes. Das erste sei ein Galileisches System, in welchem das Trägheitsgesetz gilt. Befindet sich nun der Massenpunkt im rotierenden System, so wirkt auf ihn eine Trägheitskraft und erteilt ihm eine Beschleunigung. Durch die Beobachtung der Trägheitskräfte innerhalb eines Systems können wir also, wie die klassische Mechanik lehrt, entscheiden, ob dieses ruht oder gleichförmig rotiert. Das ruhende System ist ein ausgezeichnetes, die Rotation gegen dieses eine absolute Bewegung.

Diese Auffassung ist immer als unbefriedigend angesehen worden, da sie keine Erklärung der Erscheinung, kein Zurückführen auf einfachere Erscheinungen enthält. Rotation gegen ein absolutes, ruhendes System und Auftreten von Trägheitskräften sind nur als verschiedene Ausdrucksweisen derselben Erscheinung aufzufassen.

Nun beobachten wir aber in der Natur die Rotation niemals anders als gegen Massen außerhalb des rotierenden Systems, und kinematisch ist die Rotation nur auf diese Weise nachweisbar. Wir wissen gar nicht, ob Trägheitskräfte auch dann auftreten würden, wenn alle äußeren Massen fehlten. Stellen wir uns auf den Standpunkt des allgemeinen Relativitätsprinzips, so verneinen wir dies. Die Rotationsbewegung ist danach eine Relativbewegung gegen äußere Massen; die Trägheitskräfte sind als Gravitationswirkung dieser äußeren Massen aufzufassen. Auch wenn unser System selbst ruht, und die äußeren Massen dagegen rotieren, müssen dieselben Kräfte auftreten.

So enthält erst das allgemeine Relativitätsprinzip die strenge Durchführung des Relativitätsgedankens. Wie beim speziellen Relativitätsprinzip eine geradlinige und gleichförmige Bewegung unbestimmt und unbestimmbar bleibt, so beim allgemeinen eine beliebige Bewegung, also eine beliebige Translation und Rotation. Wie wir kinematisch nur Relativbewegungen wahrnehmen, so nach dem allgemeinen Prinzip auch dynamisch. Die Natur zeigt uns niemals absolute Bewegungen irgendwelcher Art weder in Mechanik noch in Elektrizität, das ist der physikalische Sinn des allgemeinen Relativitätsprinzips.

Ebenso wie das spezielle Relativitätsprinzip die Aufstellung von Naturgesetzen verlangt, die beim Übergang aus einem System in ein dazu geradlinig und gleichförmig bewegtes sich nicht ändern, so fordert das allgemeine Prinzip Naturgesetze, die für beliebig bewegte Systeme gelten. **Diese Gesetze aufzustellen und mit der Wirklichkeit zu vergleichen, ist die eigentliche Aufgabe der Relativitätstheorie.**

Wir wenden uns nun wieder dem speziellen Relativitätsprinzip zu; müssen aber zuvor noch die Frage erledigen, ob dessen besondere Behandlung nicht durch die Aufstellung des allgemeinen Prinzips überflüssig geworden ist. Dies ist durchaus nicht der Fall. Wenn es auch in der Natur nur wenig gleichförmige Translationen gibt, so wird doch die Diskussion des speziellen Prinzips vor allem die Begriffe Raum, Zeit und Masse klären. Da ferner jede beliebige Bewegung von Punkten in sehr kleinen Zeitintervallen als gleichförmig und geradlinig angenommen werden kann, und wir in der allgemeinen Relativitätstheorie die Aufstellung von Differentialgesetzen anstreben, die das Naturgeschehen im Unendlichkleinen beschreiben, so wird die spezielle Relativitätstheorie die notwendige Grundlage der allgemeinen sein.

§ 2. Die Isotropie des Raumes in der Physik und die Relativität der zeitlichen und räumlichen Größen.

Daß das Relativitätsprinzip in seiner ihm soeben gegebenen speziellen Formulierung auf die mechanischen Probleme anwendbar ist, steht für uns außer Zweifel. Wenn es nun auch für elektrische (und optische) Erscheinungen gelten soll, müssen wir zuerst nachprüfen, ob es nicht Tatsachen gibt, die hier seine Zulässigkeit von allem Anfang an ausschließen.

Denken wir uns eine Reihe von Galileischen Koordinatensystemen, die sich zueinander in gleichförmiger Translation befinden; sie mögen mit K, K' usw.[1]) bezeichnet werden. Wenn wir in einem System K für die elektrischen Erscheinungen besonders einfache Grundgesetze gefunden haben, so verlangen wir,

[1]) Da wir es in der speziellen Relativitätstheorie immer mit solchen Systemen zu tun haben, so soll im ersten Teil die Bezeichnung K, K' ... sich stets (wenn nicht ausdrücklich anderes gesagt ist) auf geradlinig und gleichförmig zueinander bewegte Galileische Systeme beziehen.

daß dieselben Gesetze auch im System K', K'' ... gelten. Die Gleichungen, welche diese Gesetze darstellen, müssen beim Übergang von einem System in das andere invariant bleiben. Es darf unter den Systemen K kein bevorzugtes Koordinatensystem geben.

Wäre ein solches doch vorhanden, so müßte folgendes eintreten. Die Erde kann für die Dauer unserer meisten physikalischen Experimente als Träger eines unserer Koordinatensysteme K angesehen werden. Doch ändert dieses System fortwährend seine Bewegungsrichtung; es kann nur vorübergehend mit dem bevorzugten System zusammenfallen. Zu verschiedenen Zeiten müßten unsere Experimente infolge der wechselnden Bewegung gegen das „absolute" System verschiedene Versuchsergebnisse zeigen; die Bewegung der Erde müßte in die Naturgesetze eingehen. Nach der bisher in der Physik geläufigen Anschauung der Elektronentheorie ist nun ein solches bevorzugtes System in der Tat vorhanden. Der Träger der elektrischen und optischen Bewegungsvorgänge war als ruhende Substanz (Äther) gedacht; in dem damit verbundenen Koordinatensystem müssen die Naturgesetze eine besonders einfache Form zeigen[1]). Eine Anzahl von elektrischen und optischen Versuchen sind mit aller denkbaren Genauigkeit ausgeführt worden, um zu prüfen, ob die Erdbewegung in den Meßergebnissen zutage tritt. Dies ist jedoch nirgends der Fall. Soweit unsere Beobachtungsgenauigkeit reicht, verhält sich der irdische physikalische Raum völlig isotrop; eine Tatsache, welche das spezielle Relativitätsprinzip geradezu als etwas Notwendiges fordert.

Unter diesen Versuchen sei besonders der von Michelson hervorgehoben. Hat das Licht im ruhenden Äther die Geschwindigkeit c, so muß es zufolge des Additionstheorems der Geschwindigkeiten (3) in der klassischen Mechanik relativ zu der mit der Geschwindigkeit v bewegten Erde die Geschwindigkeit $c - v$ oder $c + v$ zeigen, wenn es sich mit der Erde oder gegen die Erde bewegt. Das Experiment ergibt aber, daß auch gegen die bewegte Erde die Lichtfortpflanzung nach allen Richtungen, im Widerspruch

[1]) Teilweise hat man schon vor der Relativitätstheorie die Äthervorstellung fallen lassen; das bevorzugte Koordinatensystem, an welches die Gleichungen der Elektronentheorie gebunden sein sollten, blieb jedoch bestehen.

zum Additionstheorem, gleichmäßig erfolgt. Der Betrag der Lichtgeschwindigkeit selbst bleibt dabei unbestimmt.

Ferner sei der Versuch von Trouton und Noble genannt, die eine geladene Kondensatorplatte in eine zur Erdbewegung schiefe Lage brachten. Nach der Elektronentheorie wäre das Auftreten eines Kräftepaares zu erwarten gewesen, welches die Plattenebene der Bewegungsrichtung parallel zu stellen bestrebt ist. Ein weiterer Versuch von Trouton und Rankine bezweckte die zu erwartende elektrische Widerstandsänderung nachzuweisen, die ein Draht erfährt, wenn er in die Bewegungsrichtung der Erde oder senkrecht dazu gebracht wird. In beiden Fällen blieb der gesuchte Effekt aus. Das bevorzugte Koordinatensystem, gegen das die Erde sich bewegen sollte, blieb verborgen.

Es muß nun hervorgehoben werden, daß diese Unstimmigkeit der Erfahrung mit der bisherigen Theorie — ohne Anerkennung des Relativitätsprinzips — dadurch beseitigt werden kann, daß man zu Hilfshypothesen greift, die die Elektronentheorie ergänzen. So läßt sich der Michelson-Versuch erklären, wenn man unter Beibehaltung des ruhenden substantiellen Äthers annimmt, alle bewegten Körper ziehen sich in der Bewegungsrichtung in einem bestimmten Verhältnis (vgl. § 5) zusammen (Lorentz-Kontraktion). Doch so viele verschiedenartige Experimente, so viele neue Hypothesen sind zu ihrer Erklärung notwendig gewesen[1]).

Hier setzte Einstein mit seiner ersten im Jahre 1905 erschienenen Arbeit[2]) ein. Wenn bei den elektrischen Experimenten kein bevorzugtes Koordinatensystem nachweisbar ist, so gibt es ein solches nicht; es gilt also das spezielle Relativitätsprinzip für Mechanik und Elektrizität. Das war der völlig neue Standpunkt Einsteins, dessen Konsequenzen im folgenden zu ziehen sind.

Die Unmöglichkeit eines bevorzugten Koordinatensystems für die elektrischen Erscheinungen schließt zunächst die Unmöglich-

[1]) Näheres über die Darstellung der verschiedenen hier angegebenen Versuche durch die Elektronentheorie findet sich bei M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II, 3. Aufl., Leipzig 1914.

[2]) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen d. Phys., Bd. 17, 1905. Abgedruckt in Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1915.

keit der Vorstellung vom Äther als einer ruhenden Substanz in sich. Nur dann kann z. B. die Lichtgeschwindigkeit in jedem System K, K' ... denselben konstanten Betrag besitzen.

Wir müssen nun zur mathematischen Formulierung des speziellen Relativitätsprinzips übergehen. In seiner Beschränkung auf die Mechanik war es als Galilei-Newtonsches Relativitätsprinzip identisch mit dem Satz von der Invarianz der mechanischen Grundgleichungen gegen die Galilei-Transformation (8). Es liegt nahe, dieselbe Transformation auch für das spezielle Relativitätsprinzip in seiner weiteren Fassung zugrunde zu legen.

Untersuchen wir, ob dies möglich ist. Wir beschreiten dabei den historisch eingeschlagenen Weg, indem wir nicht sofort die Grundgleichungen der Elektrizität und Optik (die Maxwellschen Gleichungen) heranziehen, sondern uns auf einen ganz einfachen Fall beschränken. Wir betrachten das Ausbreitungsgesetz des Lichtes im Vakuum. Es sind zweierlei Bedingungen zu erfüllen. Einmal soll in einem ruhend gedachten Koordinatensystem K (in der Elektronentheorie ist es dasjenige des Äthers, hier ein beliebiges, wie der Michelson-Versuch ergibt) die Ausbreitung des Lichtes im Vakuum unabhängig von der Art und dem Bewegungszustand der Lichtquelle nach allen Seiten und überall mit derselben konstanten Geschwindigkeit $c = 300\,000$ km/sec erfolgen. Man nennt diese Aussage das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Legt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems K in den Ort der punktförmig gedachten Lichtquelle zur Zeit der Lichtaussendung und beginnt in diesem Augenblick die Zeitzählung, so lautet dieses Prinzip:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0\,, \tag{17}$$

wo c unsere universelle Konstante ist. Die zweite Bedingung lautet: in irgendeinem anderen der früher definierten Koordinatensysteme K' soll die Ausbreitung nach genau demselben Gesetz erfolgen. Ist Koordinatenanfang und Zeitanfang wie vorher gewählt, und bezeichnet man die auf K' sich beziehenden Koordinaten mit Strichen, so muß also auch:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \tag{18}$$

sein. Hierbei ist c genau dieselbe Konstante wie in (17).

Diese zweite Aussage ist identisch mit dem speziellen Relativitätsprinzip. Man bezeichnet sie gelegentlich auch als Satz der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (vielleicht wäre: Satz der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit vorzuziehen, wenn schon eine besondere Bezeichnung erwünscht ist).

Der Vergleich von (17) und (18) zeigt sofort, daß unsere Galilei-Transformation (8) nicht imstande ist, die beiden Gleichungen ineinander überzuführen. (17) ist gegen die Galilei-Transformation nicht invariant. Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit widerspricht also dem Relativitätsprinzip in der Galilei-Newtonschen Fassung. Da jedoch das erstere Prinzip außer allem Zweifel steht, und auch das spezielle Relativitätsprinzip im Rahmen unserer Erfahrungen gilt, so bleibt nur übrig, zunächst einmal die in der Mechanik gefundene Form der Galileischen Transformationsgleichungen für Elektrizität und Optik zu verwerfen.

Schon vorher (S. 16) sind wir auf denselben Widerspruch gestoßen. Das mechanische Additionstheorem der Geschwindigkeiten, aus dem die Galilei-Transformation folgt, verlangt, daß falls die Lichtgeschwindigkeit in K den Wert c hat, sie in K' einen anderen Wert besitzt. Die Beobachtung hat jedoch in Übereinstimmung mit dem speziellen Relativitätsprinzip für K und K' gleiche Werte ergeben, wodurch also auch das Additionstheorem in Frage gestellt ist.

Nun gibt es wirklich einen Punkt, in welchem Additionstheorem und Galilei-Transformation angreifbar sind. Wir setzten im vorhergehenden Abschnitt: (8') $t = t'$. Die Zeit ist in der klassischen Mechanik eine unabhängig von jedem Koordinatensystem bestehende, absolute Veränderliche. Dies bedeutet eine Annahme. Wir müssen zu einer Revision des Zeitbegriffes in der Physik schreiten.

Ein exakte Definition der Zeit ist notwendig, und sie ist so zu geben, daß auf Grund der Definition Zeitmessungen möglich sind.

An einem einzigen Ort können wir die Zeit durch eine irgendwie konstruierte Uhr messen und sagen, die Zeit ist gegeben durch die Zeigerstellung der Uhr. Sind an verschiedenen Stellen Uhren, so muß die Möglichkeit des Vergleichs gegeben sein. Man könnte eine Vergleichsuhr von einer Stelle an eine andere tragen; so käme man zu einer absoluten Zeit. Doch hier sind Zweifel möglich. Wir haben bereits S. 17 gesehen, daß Längen sich bei einer Bewegung verändern (allerdings dort vom Standpunkt der Elektronen-

theorie aus; die Relativitätstheorie wird uns aber ebenfalls dazu führen). Es ist denkbar, daß bei der unmittelbaren Zeitübertragung auch Änderungen im Gang der Uhren eintreten[1]). Wir haben aber die Möglichkeit einer Uhrvergleichung mit Hilfe von Lichtsignalen oder elektrischen Signalen.

Bleiben wir einmal in einem System K. Wir können hier mit Hilfe der Lichtausbreitung eine völlig einwandfreie Definition der Zeit geben. Wir brauchen nicht einmal die Größe der Lichtgeschwindigkeit als bekannt anzunehmen, stützen uns vielmehr allein auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, wonach die Ausbreitung des Lichtes nach allen Richtungen gleichmäßig erfolgt (S. 18). Wir wollen zwei gleichartige Uhren an den Orten A und B vergleichen und setzen nur voraus, daß das Licht von A nach B ebensolange braucht als von B nach A. Ein Lichtsignal möge von A nach B und von da sofort wieder nach A gehen. t_A sei die Ausgangszeit in A, t_B in B, t'_A die Ankunftszeit in A. Dann ist:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \,. \tag{19}$$

Hieraus ergibt sich t_B, d. h. die Angabe, welche die Uhr in B bei der Ankunft des Lichtsignals zeigen muß, wenn die Angaben der Uhren in A und B übereinstimmen sollen.

Durch die Beziehung (19) ist die Zeit in B so definiert, daß sie mit derjenigen in A übereinstimmt. Wir sagen, die Uhr in B geht synchron mit der Uhr in A. Die Lichtgeschwindigkeit selbst ergibt sich aus:

$$c = \frac{2AB}{t'_A - t_A} \,. \tag{20}$$

Wenn nun das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit erfüllt ist, so gelten, wenn wir an der soeben gegebenen Definition des Synchronismus festhalten, allgemein die Aussagen:

1. Wenn die Uhr in B synchron mit der Uhr in A läuft, so läuft die Uhr in A synchron mit der Uhr in B.
2. Wenn die Uhr in A sowohl mit der Uhr in B als auch mit der Uhr in C synchron läuft, so laufen auch die Uhren in B und C synchron relativ zueinander.

[1]) Gangänderungen infolge Unvollkommenheit des Mechanismus kommen hier natürlich nicht in Frage. Wir verstehen unter Uhren immer vollkommen richtig gehende Uhren z. B. schwingende Atome.

Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man beachtet, daß die Entfernung zwischen zwei beliebigen Punkten stets gleich $c \cdot \Delta t$ ist, wo c unsere oben bestimmte Lichtgeschwindigkeit, Δt den Zeitunterschied bedeutet, welcher der Bewegung des Lichtes vom einen nach dem anderen Punkt entspricht.

Wir können es also erreichen, daß alle Uhren, die in einem System ruhen, synchron laufen. Denken wir uns in jedem Punkt unseres Systems eine solche Uhr aufgestellt, so ist die Zeit irgendeines Ereignisses definiert durch die Angabe der Uhr, die sich an der betreffenden Stelle befindet. Gleichzeitig sind zwei Ereignisse an verschiedenen Stellen, wenn die Angaben der dort sich befindenden Uhren übereinstimmen. Doch sind diese Aussagen über Zeit und gleichzeitig an unser eines beliebig festgelegtes System gebunden, denn nur innerhalb desselben ist die Ausbreitung des Lichtes eine nach allen Richtungen gleichmäßige.

Wir betrachten nun die Lichtausbreitung von zwei verschiedenen Systemen K und K' aus. Wir denken uns die beiden Uhren in A und B fest verbunden, etwa auf den Enden eines Stabes angebracht. Der Stab möge in K' ruhen, K' selbst bewege sich in der Richtung AB des Stabes mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zu K. Die Uhren in A und B sollen die Zeit des „ruhenden" Systems K angeben; sie müssen also in ihren Angaben übereinstimmen mit den ruhenden Uhren von K, an deren Stelle sie sich gerade befinden. Die Uhren in A und B sind synchron mit allen Uhren des Systems K.

Nun möge wieder ein Lichtstrahl von A nach B und zurück laufen. In K wird der Vorgang folgendermaßen beobachtet. Ein Beobachter sieht, daß die Bewegung des Stabes AB mit der Geschwindigkeit v, die Bewegung des Lichtes mit der Geschwindigkeit c erfolgt. Für ihn ist die relative Geschwindigkeit beider für den Weg des Lichtes von A nach B: $c - v$, für den Weg von B nach A dagegen: $c + v$. Innerhalb eines Systems gilt also unverändert das mechanische Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Werden die Ausgangs- bzw. Ankunftszeiten des Lichtes in A, B und A wieder mit t_A, t_B und t'_A bezeichnet, so ist nun nach Angabe der Uhren im System K:

$$(21) \qquad t_B - t_A = \frac{r}{c - v}; \qquad t_{A'} - t_B = \frac{r}{c + v},$$

wo r die Entfernung AB bedeutet, so wie sie im System K wahr-

genommen wird. t_B ist, dies sei nochmals hervorgehoben, die Angabe der Uhr in B im Augenblick der Ankunft des Lichtsignals, wobei die Uhr in B synchron mit derjenigen in A läuft (bezogen auf das System K).

Ein Beobachter in K', der die Bewegung des Stabes mitmacht, wird nun andererseits wahrnehmen, daß das Licht von A nach B und zurück sich mit der Geschwindigkeit c bewegt. Er möge die Uhr in A als maßgebend betrachten; wenn diejenige in B für ihn synchron mit A ginge, so müßte die Uhr in B bei der Ankunft des Lichtsignals eine Zeit t_B zeigen, für welche $t_B - t_A = t_{A'} - t_B$ wäre. Die Uhr in B zeigt aber eine andere Zeit; sie ist im System K' also nicht synchron mit A.

Hieraus folgt: Ereignisse, die im System K gleichzeitig sind, sind es in K' nicht. Der Begriff gleichzeitig ist kein absoluter, sondern ein relativer, an das Koordinatensystem gebundener. Synchron laufende Uhren sind nur in jeweils einem System möglich; alle Zeitangaben beziehen sich nur auf eines der Koordinatensysteme K, K'.... Ebenso wie die Angaben von räumlichen Koordinaten erst einen Sinn erhalten durch Angabe des Koordinatensystems, auf welches sie sich beziehen, ebenso ist auch zur Festlegung einer Zeitangabe ein System zu definieren, in bezug auf welches sie gilt.

So ist also durch Einstein der Begriff „absolute Zeit" hinfällig geworden. Dies bezieht sich allerdings zunächst nur auf alles Naturgeschehen in Elektrizität und Optik. Doch ist es nicht denkbar, daß in der Mechanik ein absoluter und in der Elektrizität ein relativer Zeitbegriff gilt (häufig sind ja beide Gebiete in demselben Vorgang verknüpft); da die Relativität der Zeit in der elektrischen Erscheinungswelt als eine notwendige Vorstellung zutage getreten ist, so müssen wir die klassische Mechanik fallen lassen und versuchen, eine neue Mechanik aufzubauen. Doch das wird uns erst später (§ 9) beschäftigen.

Auch von einer anderen Seite her zeigt sich dieselbe Forderung. Wir haben in der klassischen Mechanik Längen (Abstände von Punkten starrer Körper) als unabhängig vom Koordinatensystem bestehend angenommen. Wir messen solche Längen durch Anlegen eines Maßstabes. Befindet sich eine als Gerade gedachte Länge in der Richtung ihrer Ausdehnung in geradliniger und gleich-

förmiger Bewegung relativ zu einem Koordinatensystem K, so können wir die Länge mittels eines mitbewegten Maßstabes, also in einem bewegten System K', messen, wir erhalten die „Länge des Stabes im bewegten System". Wir können jedoch die Messung noch in anderer Weise vornehmen. Wir legen unter Benutzung von Uhren, die im System K synchron gehen, Anfang und Ende des Stabes zu derselben Zeit im ruhenden System K fest. Mit dem vorher benützten, nun aber im System K ruhenden Maßstab messen wir die soeben in K festgelegte Entfernung der Endpunkte unserer Länge aus. Wir erhalten die „Länge des bewegten Stabes im ruhenden System". Die klassische Mechanik nimmt an, daß die beiden so bestimmten Längen einander gleich sind. Dies ist willkürlich und, wie wir bald sehen werden, unverträglich mit der gleichzeitigen Gültigkeit des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und des speziellen Relativitätsprinzips in der Elektrizität. Dann ist aber auch der Begriff „starrer Körper" nicht mehr möglich.

Mit der Übertragung des Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips auf alle Naturvorgänge sind also grundlegende Änderungen im Gebäude der Mechanik notwendig verknüpft.

§ 3. Die Raum-Zeit-Koordinaten und die Lorentz-Transformation.

Die Abhängigkeit der Zeitangaben von dem sich bewegenden Koordinatensystem, auf welches sie sich beziehen, hat dazu geführt, die Zeit als vierte Koordinate neben den drei räumlichen einzuführen.

Alle räumlichen Wahrnehmungen erfolgen zu irgendeiner Zeit; alle Zeitangaben sind an räumliche Vorgänge geknüpft. Alles Geschehen spielt sich für uns in einer vierdimensionalen Welt ab, wobei drei Dimensionen dem Raum zugehören, die vierte der Zeit. Diese Auffassung ist durchaus nicht neu; wir haben auch schon immer in graphischen Darstellungen die Zeit als Koordinate aufgetragen. Aber die untrennbare Verknüpfung von Raum und Zeit in allen physikalischen Erscheinungen ist doch erst durch die Feststellung der Relativität der Zeit als etwas Notwendiges hervorgetreten. So hat auch erst im Rahmen der Relativitätstheorie

H. **Minkowski**[1]) die Raum-Zeit-Vorstellung so weit ausgebaut, daß wir nun alles Geschehen in Raum und Zeit durch eine vierdimensionale Geometrie im Raum-Zeit-Kontinuum darzustellen vermögen. Wir können also unsere relativ zueinander bewegten räumlichen Systeme K, K' ... als vierdimensionale Raum-Zeit-Systeme auffassen. Die ungestrichenen und gestrichenen Koordinaten werden durch besondere Transformationsgleichungen ineinander übergehen, deren Herleitung unsere nächste Aufgabe ist.

Unser vierdimensionales Kontinuum nennen wir mit Minkowski die „Welt". x, y, z, t heißen die Koordinaten eines „**Weltpunktes**". Das Kontinuum der x, y, z allein wollen wir im folgenden stets als „Raum" bezeichnen. Vorerst mögen sich die x, y, z auf ein räumliches **Cartesisches** System beziehen. In welcher Weise die Zeit aufzutragen ist, wird sich bald ergeben.

Um auch äußerlich der Zeit den Charakter der vierten Weltkoordinate zu geben, setzen wir:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ct = x_4. \tag{22}$$

c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Die Wahl von ct statt t ist aus Gründen der Symmetrie erfolgt. Wir können freilich die Gleichsetzung $x_4 = ct$ auch in anderer Weise deuten. ct ist der Lichtweg in der Zeit t; messen wir die Zeit in einer solchen Einheit, daß dasselbe Zeitintervall durch x_4 dargestellt wird, so ist die Lichtgeschwindigkeit 1. $x_4 = ct$ bedeutet also die Einführung einer Zeiteinheit, für welche $c = 1$ wird. Vorläufig jedoch soll der ursprüngliche Wert der Lichtgeschwindigkeit beibehalten werden; x_4 ist also lediglich ein Symbol für das Produkt ct.

Wir werden in Zukunft die Koordinaten x, y, z, t und x_1, x_2, x_3, x_4 nebeneinander führen und zwar die neuen Koordinaten für die Darstellung der Relativitätstheorie, die älteren für die bisherigen Theorien oder für den Vergleich mit diesen; gelegentlich auch, wenn es sich darum handelt, durch Hervortretenlassen der Zeit die Resultate möglichst zu veranschaulichen.

Wir kehren nun zu dem Problem des vorhergehenden Paragraphen (S. 18) zurück. Das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit lautet in einem System K:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0. \tag{23}$$

[1]) Vgl. dessen Vortrag „Raum und Zeit". Abdruck in **Lorentz-Einstein-Minkowski**, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1915.

Das spezielle Relativitätsprinzip verlangt, daß die Gleichung (23) unverändert in jedem zu K geradlinig und gleichförmig bewegten System K' ... gilt.

Dabei setzen wir natürlich voraus, daß die Längen und Zeiten in jedem der Systeme K, K' ... mit denselben Maßstäben und Uhren gemessen werden; ein Maßstab behält also innerhalb jedes Systems, in welchem er ruht, seine Länge; ebenso eine Uhr ihren Gang, wenn sie von einem System zu einem anderen gebracht wird.

Wir müssen nun die Galilei-Transformation durch eine andere ersetzen, für welche die Gleichung (23) invariant ist, gleichgültig ob wir sie auf ein ruhendes (K) oder dazu gleichförmig und geradlinig bewegtes räumliches System (K') beziehen. Für die Ableitung dieser Transformationsgleichungen folgen wir einem von Einstein neuerdings eingeschlagenen, besonders einfachen Weg[1]).

Die Koordinatensysteme K und K' wählen wir so, daß ihre x_1-Achsen dauernd miteinander und mit der Richtung der relativen Geschwindigkeit von K' gegen K zusammenfallen. Ein Lichtstrahl möge sich in der positiven x_1-Achse, ein anderer in der negativen bewegen. Dann ist zufolge (23) in K:

(24) $$x_1 - x_4 = 0; \quad \text{bzw. } x_1 + x_4 = 0\,.$$

Im bewegten System K' ist:

(25) $$x_1' - x_4' = 0; \quad x_1' + x_4' = 0\,,$$

also:

(26) $$(x_1' - x_4') = \lambda\,(x_1 - x_4); \quad (x_1' + x_4') = \mu\,(x_1 + x_4)\,.$$

Setzen wir:

(27) $$a = \frac{\lambda + \mu}{2}; \quad b = \frac{\lambda - \mu}{2}\,,$$

so folgt aus (26):

(28) $$x_1' = a x_1 - b x_4; \quad x_4' = a x_4 - b x_1\,.$$

Sind a und b bekannt, dann sind die Transformationsgleichungen, welche die Gleichungen (24) in das gestrichene System überführen, gefunden.

[1]) A. Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Sammlung Vieweg, Heft 38 (Anhang).

Für den Koordinatenanfangspunkt von K ist $x'_1 = 0$, **also:**

(29) $$x_1 = \frac{b}{a} x_4 .$$

Ist v die Geschwindigkeit von K' relativ gegen K, so ist aber:

(30) $$x = vt \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{v}{c} x_4 ,$$

also:

(31) $$\frac{b}{a} = \frac{v}{c} .$$

Denken wir uns nun einen Einheitsmaßstab, das eine Mal in K', das andere Mal in K ruhend, so muß im ersten Fall seine Länge gemessen von K aus gleich der Länge sein, die er, in K ruhend und von K' aus gemessen, besitzt. Die Messung des bewegten Stabes vom ruhenden System aus geschieht dabei nach dem S. 23 geschilderten Verfahren.

Setzen wir zuerst $x_4 = 0$, so wird nach (28) $x'_1 = a x_1$. Die Länge eines Stabes $x'_1 = 1$ wird also in K:

(32) $$\Delta x_1 = \frac{1}{a} .$$

Eliminieren wir x_4 aus den beiden Gleichungen (28) und setzen dann für das andere Mal $x'_4 = 0$, so ergibt sich:

(33) $$x'_1 = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x_1 ,$$

also für $x_1 = 1$:

(34) $$\Delta x'_1 = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) .$$

Da $\Delta x_1 = \Delta x'_1$, so ist:

(35) $$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} ,$$

wo:

(36) $$\beta = \frac{v}{c}$$

gesetzt ist.

Die Transformationsgleichungen (28) lauten demnach:

(37) $$x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \qquad x'_4 = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Durch (37) gehen die Gleichungen (24) in (25) über. Zugleich ist:

(38) $$x_1'^2 - x_4'^2 = x_1^2 - x_4^2.$$

Behalten die beiden Systeme K und K' die Lage ihrer Achsen und die Richtung ihrer relativen Geschwindigkeit bei, erfolgt aber die Bewegung des Lichtstrahls vom Koordinatenanfangspunkt in beliebiger Richtung, also zufolge der Gleichung (23), so treten zu (37) noch die Gleichungen $x_2' = x_2$ und $x_3' = x_3$ hinzu. Man erhält also die Transformationsgleichungen:

(39) $$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die Gleichungen (39) führen [wie auch (38) zeigt] (23) in sich selbst über. Die Koordinatensysteme sind dabei so gewählt, daß dem Weltpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ der Weltpunkt $x_1' = x_2' = x_3' = x_4' = 0$ entspricht.

Die Umkehrung von (39) ergibt:

(40) $$x_1 = \frac{x_1' + \beta x_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{x_4' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Besonders ist nun zu beachten, daß die Transformationsgleichungen (39) bzw. (40) nicht nur die Gleichung (23) erfüllen, sondern jeden beliebigen Wert:

(41) $$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

in sich selbst überführen; d. h. die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ ist gegenüber den angegebenen Transformationen eine Invariante. Dabei sind Längen und Zeiten in allen Systemen mit denselben Maßstäben und denselben Uhren gemessen (vgl. S. 25).

Man nennt die Gleichungen (39) bzw. (40) die Lorentz-Transformation; sie ist außer von W. Voigt auch bereits von H. A. Lorentz in einer Arbeit[1]), die als Vorläufer der Relativitätstheorie aufzufassen ist, aufgestellt worden.

Kehren wir wieder zur älteren Bezeichnung x, y, z, t der Weltpunkte zurück, so lautet die Lorentz-Transformation:

[1]) H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. Übersetzt in Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip, Leipzig 1915.

$$(42)\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

oder in ihrer Umkehrung:

$$(43)\quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wird die Bewegung eines Lichtstrahles im System K durch x, y, z, t dargestellt, so erhält man dessen Bewegung in K' durch Übertragung der einzelnen Weltpunkte mittels der Lorentz-Transformation. In beiden Systemen erfolgt die Bewegung des Lichtes mit der Geschwindigkeit c.

Wir können nun auch noch die Beschränkung über die Lage der x_1-Achsen fallen lassen. Denken wir uns zwei beliebig orientierte Cartesische Koordinatensysteme K und K'; K' bewegt sich irgendwie geradlinig und gleichförmig gegen K. Der Ausdruck $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ bleibt immer ungeändert, wenn wir dem System K eine räumliche Drehung geben, denn für eine solche behält $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ denselben Wert. Wir können also die Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ in $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2$ durch drei lineare Transformationen überführen.

Wir wählen zwei Zwischensysteme K^0 und $K^{0'}$ mit den Koordinaten x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4 bzw. $x_1^{0'}$, $x_2^{0'}$, $x_3^{0'}$, x_4', von denen K^0 aus K und $K^{0'}$ aus K' durch räumliche Drehungen hervorgeht. Für K^0 und $K^{0'}$ selbst mögen x_1^0- bzw. $x_1^{0'}$-Achse miteinander und mit der Richtung der relativen Geschwindigkeit von K' gegen K zusammenfallen. Dann behält unsere quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ ihren Wert, wenn wir sie 1. durch räumliche Drehung in $x_1^{02} + x_2^{02} + x_3^{02} - x_4^2$; 2. durch die Lorentz-Transformation in $x_1^{0'2} + x_2^{0'2} + x_3^{0'2} - x_4'^2$ und 3. wiederum durch räumliche Drehung in $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2$ überführen.

Man kann die drei linearen Transformationen zu einer einzigen zusammenfassen, die man im Gegensatz zu der vorhergehenden speziellen als allgemeine Lorentz-Transformation bezeichnet. Ihre Koeffizienten sind wie die der speziellen Lorentz-

Transformation (S. 27) reelle konstante Größen. Rein formal lautet sie:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 \\
x_2' &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 \\
x_3' &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4 \\
x_4' &= \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4 \,.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Da $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ sein soll, so müssen zwischen den von Punkt zu Punkt konstanten Koeffizienten folgende 10 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{m=4} \alpha_{mn}^2 = +1 \quad (n = 1, 2, 3) \quad \sum_{m=1}^{m=4} \alpha_{m4}^2 = -1 \\
&\sum_{m=1}^{m=4} \alpha_{mn}\alpha_{mo} = 0 \quad (n, o = 1, 2, 3, 4; \quad n \neq o) \,.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Diese Bedingungen weichen von den aus der analytischen Geometrie bekannten „Orthogonalitäts-Bedingungen" dadurch ab, daß die vierte Quadratsumme negativ ist. Auch den Übergang von K' nach K können wir durch ein entsprechendes System von Transformationsgleichungen darstellen. Ferner kann eine Lorentz-Transformation, die von K nach K' führt, und eine zweite, die von K' nach K'' führt, zu einer einzigen von K nach K'' führenden vereinigt werden. Sämtliche Lorentz-Transformationen bilden eine „Gruppe"[1]), und zwar eine lineare homogene Gruppe.

Vergegenwärtigen wir uns nun wieder unsere Problemstellung. Das spezielle Relativitätsprinzip verlangt, daß die allgemeinen Naturgesetze unverändert gelten sollen, gleichgültig ob wir sie auf K oder K' beziehen. Ein solches Naturgesetz ist das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit; daß es nicht nur in einem bevorzugten Koordinatensystem gilt, sondern in jedem anderen, das sich dazu in gleichförmiger Translation befindet, beweist der Versuch von Michelson. Der Übergang der verschiedenen Systeme ineinander muß aber dann durch die Lorentz-Transformation erfolgen. Diese tritt für unseren optischen Vorgang an die Stelle der Galilei-Transformation. Ihre Bedeutung geht aber darüber weit hinaus. Wir werden zeigen, daß nicht nur das Gesetz der Lichtausbreitung,

[1]) Vgl. hierzu: F. Klein, Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. Physikal. Zeitschr. Bd. 12, 1911, S. 17.

sondern die bereits bestehenden elektrischen Grundgesetze überhaupt ungeändert für jedes der Systeme K, K' ... gelten, wenn wir für die Umrechnung der Grundgleichungen die Lorentz-Transformation verwenden. Alle relativ zueinander in gleichförmiger Translation sich befindenden Bezugssysteme, die durch diese Transformation aus einem berechtigten System (im welchem die elektrischen Grundgleichungen gelten) hervorgehen, sind für die elektrischen und optischen Vorgänge gleichwertig. Ebenso wie also in der Mechanik die Invarianz der Naturgesetze in bezug auf die Galilei-Transformation der mathematische Ausdruck des Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips ist, ebenso stellt die Invarianz in bezug auf die Lorentz-Transformation die mathematische Formulierung des speziellen Relativitätsprinzips, zunächst für Optik und Elektrizität, dar.

Wir hätten damit zwei Relativitätsprinzipe, das eine für Mechanik, das andere für Elektrizität und Optik. Beide können aber nicht nebeneinander bestehen, ebensowenig wie eine absolute Zeit in der Mechanik und eine relative in der Elektrizität. Denken wir uns irgendeinen Vorgang, der zugleich mechanischer und elektrischer Natur ist (z. B. die Drehung eines Hebels durch elektromagnetische Kräfte), so würde der Vorgang in seinem mechanischen Teil irgendeinem aus der Schar derjenigen Koordinatensysteme angehören, die durch die Galilei-Transformation auseinander hervorgehen. Zugleich müßte er sich (in seinem elektrischen Teil) in einem der unendlich vielen Bezugssysteme, die durch die Lorentz-Transformation bedingt sind, abspielen. Der ins Auge gefaßte Vorgang müßte also ein durch beide Relativitätsprinzipe bestimmtes, ausgezeichnetes System festlegen, ebenso wie z. B. ein Punkt, der zugleich auf zwei Kurven liegen soll, eben deren Schnittpunkt ist. Es kann also für Mechanik und Elektrizität nur ein Relativitätsprinzip geben.

Da für die Elektrizität die Galilei-Transformation mit Sicherheit nicht gilt, so bleibt nur die Möglichkeit, die Lorentz-Transformation auch in der Mechanik als mathematischen Ausdruck des Relativitätsprinzips anzusehen. Daß wir damit nicht etwas Unmögliches verlangen, geht schon daraus hervor, daß für kleine Relativgeschwindigkeiten v der beiden Systeme K und K' (verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit c) die Lorentz-Trans-

formation (42) in die Galilei-Transformation ($x' = x - vt$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = t$) übergeht. Wir werden also erwarten können, daß für kleine v, wie sie fast überall in der Natur vorkommen, die klassische Mechanik ihre Gültigkeit behält. Diese Erwartung wird sich später (§ 9) bestätigt finden.

Wir werden von nun an die Invarianz der Naturgesetze bezüglich der Lorentz-Transformation als mathematischen Ausdruck des speziellen Relativitätsprinzips in Elektrizität und Mechanik ansehen. Diejenigen Gesetze, welche diese Invarianzbedingung erfüllen, sind für uns die „richtigen"; sie lassen eine geradlinige und gleichförmige Bewegung in allen Naturvorgängen unbestimmt. Alle Naturgesetze gelten dann nicht nur in einem berechtigten Koordinatensystem, sondern unverändert in der dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Systemen, die sich gegen dieses eine in gleichförmiger Translation befinden, und für welche die Koordinaten durch die Lorentz-Transformation auseinander hervorgehen.

Es braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden, daß die Lorentz-Transformation auch für unendlich kleine Größen bestehen bleibt; daß man also stets x_1, x_2, x_3, x_4 durch dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 usw. ersetzen kann. Insbesondere ist:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 \tag{46}$$

eine Invariante in bezug auf die Lorentz-Transformation.

§ 4. Raumartige und zeitartige Weltvektoren.

Die räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Weltpunktes dachten wir uns in einem Cartesischen Koordinatensystem aufgetragen; wir wollen nun die Frage erledigen, wie die Zeitkoordinate x_4 mit den drei räumlichen in Verbindung zu bringen ist.

Im Cartesischen System stellt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ das Quadrat der Entfernung des Raumpunktes x_1, x_2, x_3 vom Anfangspunkt des Systems dar. Bei einer Drehung des Systems, d. h. bei einer linearen, homogenen und orthogonalen Transformation, bleibt der Wert der quadratischen Form ungeändert. In unserem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum bleibt in analoger Weise bei der linearen homogenen Transformation (44) der Wert der quadratischen Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ erhalten. Letztere bezeichnen wir als

den Raum-Zeit-Abstand des Weltpunktes x_1, x_2, x_3, x_4 vom Koordinatenanfangspunkt.

Doch bedeutet unsere Form im zweiten Fall nicht einfach eine Erweiterung von drei auf vier Dimensionen; x_4^2 hat vielmehr ein negatives Vorzeichen (die Form ist vom Trägheitsindex 1), x_4 ist also als imaginäre Strecke von der Länge x_4 aufzufassen. Wir können uns die Zeitkoordinate $x_4 = ct$ in der vierten Dimension senkrecht zu den drei Raumkoordinaten als reelle Zahl, aber auf einer imaginären Achse aufgetragen denken. Die vierdimensionale Raum-Zeit-Geometrie ist so zwar der Euklidischen Geometrie nahe verwandt, aber nicht einfach eine vierdimensionale Euklidische Geometrie selbst.

Wir können nun freilich die Analogie mit letzterer formal noch dadurch weiter zum Ausdruck bringen, daß wir als Zeitkoordinate (vgl. S. 24) den Wert $x_4 = ict$ wählen, wodurch die quadratische Form in $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ übergeht; x_4 ist dann als imaginäre Zahl auf einer reellen Achse aufzutragen, die senkrecht zu den drei Raumachsen steht. Die Wahl der imaginären Zeitkoordinate hat den Vorteil, daß wir die Formeln der dreidimensionalen Geometrie, besonders der dreidimensionalen Vektoranalysis, auf vier Dimensionen erweitert, sofort für die Darstellung der speziellen Relativitätstheorie verwerten können[1]), während wir bei unserer zuerst getroffenen Festsetzung $x_4 = ct$ erst eine Vektoranalysis für die besondere Nicht-Euklidische Geometrie schaffen müssen. Wenn wir trotzdem für die folgende Darstellung die Wahl $x_4 = ct$ vorziehen, so geschieht es deshalb, weil durch sie leichter der Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie hergestellt wird, die sich als unmittelbare Anwendung der Nicht-Euklidischen Geometrie in der allgemeinsten Form erweisen wird.

Doch wollen wir die imaginäre Zeitkoordinate ict einen Augenblick benutzen, um mit ihrer Hilfe zu zeigen, daß wir die spezielle Lorentz-Transformation in einfacher Weise als Drehung um einen imaginären Winkel deuten können.

Setzen wir $\bar{x}_4 = ix_4$, so geht die Lorentz-Transformation (37) über in:

(47) $$x_1' = \frac{x_1 + i\beta\bar{x}_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \bar{x}_4' = \frac{\bar{x}_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

[1]) Vgl. M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl., Braunschweig 1913.

Wir definieren nun einen imaginären Winkel φ durch:

(48) $$\sin\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \operatorname{tang}\varphi = i\beta = i\frac{v}{c}.$$

Die Lorentz-Transformation wird dann:

(49) $$x_1' = x_1\cos\varphi + \bar{x}_4\sin\varphi, \quad \bar{x}_4' = -x_1\sin\varphi + \bar{x}_4\cos\varphi,$$

wovon die Umkehrung lautet:

(50) $$x_1 = x_1'\cos\varphi - \bar{x}_4'\sin\varphi, \quad \bar{x}_4 = x_1'\sin\varphi + \bar{x}_4'\cos\varphi.$$

Die spezielle Lorentz-Transformation stellt also eine Drehung um den imaginären Winkel φ dar, und man kann demnach die allgemeine Lorentz-Transformation aus drei Drehungen zusammensetzen (vgl. S. 28).

Die Weltpunkte sollen nun weiterhin durch die vier reellen Größen x_1, x_2, x_3, x_4, wie sie durch die Gleichungen (22) definiert wurden, festgelegt werden. Entsprechend der S. 10 getroffenen Festsetzung können wir hier die vier Größen als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im vierdimensionalen Kontinuum auffassen und allgemein als Weltvektor jeweils vier Werte definieren, die sich wie die Koordinaten eines Weltpunktes (also nach der Lorentz-Transformation) transformieren. Die Länge s unseres Vektors, d. h. der Raum-Zeit-Abstand vom Koordinatenanfangspunkt, ist durch die quadratische Form:

(41) $$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

gegeben. Während aber ein dreidimensionaler räumlicher Abstand stets reell ist, kann s reell oder imaginär sein, je nachdem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \gtrless x_4^2$ ist. Der Wert s besteht nun unabhängig von der besonderen Wahl des Koordinatensystems; die Einteilung der Weltpunkte in solche mit reellem oder imaginärem Abstand vom Nullpunkt bzw. die Einteilung der Weltvektoren in solche mit reeller oder imaginärer Länge gilt also unabhängig von jedem Koordinatensystem.

Wir können die beiden Arten von Vektoren in einfacher Weise deuten. Sei $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ positiv, und denken wir uns den Wert in allen möglichen Koordinatensystemen K, K' ... festgelegt, dann ist stets eines (K_0) vorhanden, für das $x_4 = 0$ ist. $s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ stellt dann in K_0 den räumlichen Abstand des Weltpunktes vom Anfangspunkt dar. Diese beiden Punkte befinden sich gleichzeitig in der durch 0, 0, 0 und x_1, x_2, x_3 definierten

räumlichen Lage; man sagt, der Weltpunkt ist mit dem Nullpunkt in dem gewählten Koordinatensystem K_0 „gleichzeitig". Es gibt also ein Koordinatensystem, in welchem für $s^2 > 0$ der Weltabstand zur räumlichen Entfernung wird; wir nennen deshalb einen solchen Abstand $s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$ oder den entsprechenden Vektor raumartig.

Ist $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ negativ, so gibt es stets eines (K_0) unter den Systemen $K, K' \ldots$, für welches $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, bzw. $s = \sqrt{-x_4^2}$ ist. Der Abstand des Weltpunktes vom Nullpunkt der Raum- und Zeitzählung wird in diesem System allein durch die Größe ix_4 dargestellt, d. h. durch die Größe x_4, auf einer imaginären Zeitachse aufgetragen, die den Weltpunkt und Nullpunkt miteinander verbindet. Der Weltpunkt ruht dauernd im Anfangspunkt des ausgezeichneten räumlichen Koordinatensystems K_0, dagegen ist die Zeitkoordinate für diesen Punkt von null auf $x_4 = ct$ angewachsen; der Weltpunkt wird also durch eine Uhr veranschaulicht, die im Anfangspunkt unseres besonders gewählten (gegen K gleichförmig bewegten) Systems K_0 ruht. Der Abstand ist in unserem Fall ein rein zeitlicher. Wir nennen deshalb jeden Abstand oder Vektor, für welchen $s^2 < 0$ ist, zeitartig.

Wir können ihn auch durch:

$$(51) \qquad s^2 = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2; \quad x_4^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

definieren, wo s nun wieder reell ist. Denken wir uns jetzt einen geradlinig und gleichförmig bewegten Punkt. Ihm mögen in einem Augenblick die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 in demjenigen System zukommen, in welchem er sich bewegt. Eine mit ihm fest verbundene Uhr dagegen wird in demselben Augenblick in dem mit dem Punkt fest verbundenen System die Zeit $\frac{s}{c}$ in Sekunden angeben. Wir nennen diese Zeit die Eigenzeit des bewegten Punktes und setzen sie:

$$(52) \qquad \tau = \frac{1}{c}\sqrt{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

oder in der älteren Bezeichnung:

$$(53) \qquad \tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)} = t\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}},$$

wo q die Geschwindigkeit des Punktes ist.

Führen wir als Zeiteinheit diejenige ein, für welche $c = 1$ ist (vgl. S. 24), dann ist die Eigenzeit unmittelbar durch:

$$s = \sqrt{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = x_4 \sqrt{1 - v^2} \tag{54}$$

gegeben, wo v nun die Geschwindigkeit unseres Punktes in der neuen Zeiteinheit bedeutet.

Besonders anschaulich tritt der Unterschied zwischen raumartigen und zeitartigen Vektoren zutage, wenn wir eine von H. Minkowski gegebene geometrische Darstellung der Lorentz-Transformation heranziehen. Diese wird uns zugleich eine Reihe weiterer Folgerungen liefern.

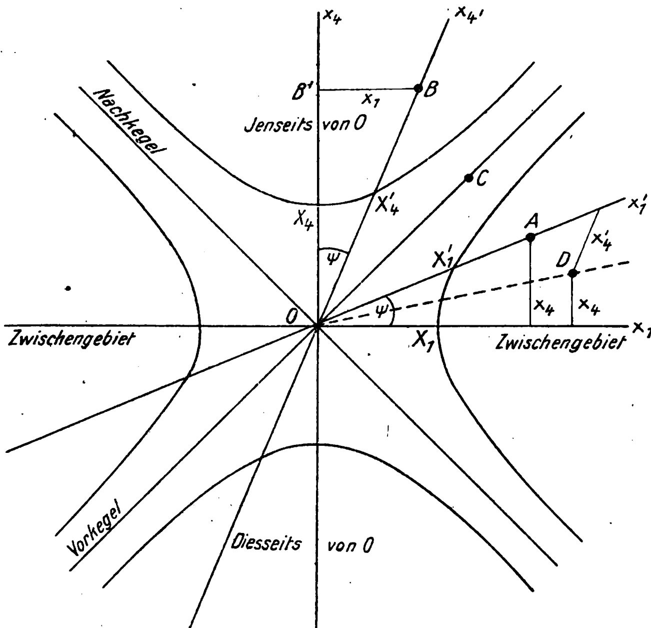


Fig. 1.

Wir legen zwei zueinander bewegte Systeme K und K' zugrunde; die x_1- bzw. x_1'-Achse mögen wieder untereinander und mit der Richtung der relativen Geschwindigkeit zusammenfallen. Wir betrachten einen Vorgang in der $x_1 x_4$-Ebene, für den also die Lorentz-Transformation in der einfachen Form (37) gilt.

Wir zeichnen (Fig. 1) in der $x_1 x_4$-Ebene, in welcher die positive x_1- bzw. x_4-Achse durch die zueinander senkrechten Geraden

OX_1 und OX_4 festgelegt ist, die gleichseitigen Hyperbeln $x_1^2 - x_4^2 = +1$ und $x_1^2 - x_4^2 = -1$, sowie die Geraden $x_1 + x_4 = 0$ und $x_1 - x_4 = 0$. Wir ziehen zwei Gerade OX_1' und OX_4', die mit der x_1- und x_4-Achse den Winkel ψ $\left(\text{wo } \operatorname{tang}\psi = \beta = \frac{v}{c} \text{ ist}\right)$ bilden und beweisen folgenden Satz:

Sind für das Koordinatensystem K die räumliche x_1-Achse und die zeitliche x_4-Achse durch zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade x_1 und x_4 festgelegt und bedeuten die Abstände OX_1 und OX_4 der Scheitelpunkte der Hyperbeln die Einheiten für die Koordinaten x_1 und x_4, so sind die entsprechenden Achsen für das dazu bewegte System K' durch die Geraden OX_1' und OX_4' gegeben, welche mit OX_1 bzw. OX_4 den Winkel ψ bilden. Hierbei stellen die Abstände des Anfangspunktes O von den Schnittpunkten X_1' und X_4' mit den Hyperbeln zugleich die Einheiten für x_1' bzw. x_4' dar.

Der Beweis ist der folgende.

Sind die Koordinaten eines Punktes im System K durch x_1, x_4, diejenigen desselben Punktes in K' durch x_1', x_4' festgelegt, so bestehen zufolge unserer Figur bei einer zunächst beliebigen Lage der x_1'- und x_4'-Achse die Beziehungen:

(55) $$x_1' = ax_1 + bx_4, \qquad x_4' = cx_1 + dx_4.$$

Für unsere besonders getroffene Wahl der x_1'- und x_4'-Achse nehmen die Koeffizienten der Transformationsgleichungen besondere, jetzt herzuleitende Werte an. Im System K ist die Lage von X_1' durch die Gleichungen $x_1^2 - x_4^2 = +1$ und $x_4 = \beta x_1$, die von X_4' durch $x_1^2 - x_4^2 = -1$ und $x_1 = \beta x_4$ bestimmt; also ist im System K:

$$\text{für } X_1'\colon\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_4 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{für } X_4'\colon\ x_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Im gestrichenen System soll zufolge unseres Satzes sein

$$\text{für } X_1'\colon\ x_1' = 1, \qquad x_4' = 0$$

$$\text{für } X_4'\colon\ x_1' = 0, \qquad x_4' = 1.$$

Setzt man diese Werte in (55) ein, so ergibt jeder der Punkte X_1 und X_4 je ein Gleichungspaar zur Bestimmung der Koeffizienten.

Die Ausrechnung liefert:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad b = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad c = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

sodaß (55) übergeht in:

(56) $$x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad x'_4 = \frac{x_4 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die Gleichungen sind völlig identisch mit der Lorentz-Transformation (37) [S. 26]. Hierdurch ist unser Satz bewiesen. Unsere Konstruktion gestattet in einfacher Weise x'_1, x'_4 aus x_1, x_4 und umgekehrt herzuleiten.

In unserer vierdimensionalen Geometrie steht allerdings die (imaginäre) x'_4-Achse auf der x'_1-Achse senkrecht, was in der Figur nicht der Fall ist. Wir müssen aber beachten, daß unsere Figur das Bild einer speziellen Nicht-Euklidischen Geometrie in einer reellen Euklidischen Ebene darstellt.

Die Figur läßt uns nun sofort raumartige und zeitartige Vektoren unterscheiden. Für die ersteren ist $x_1^2 > x_4^2$; sie liegen also alle, wenn wir uns auf den ersten Quadranten beschränken, zwischen der Geraden OC ($x_1 = x_4$) und der positiven x_1-Achse. Die zeitartigen Vektoren, für welche $x_1^2 < x_4^2$, befinden sich zwischen derselben Geraden und der positiven x_4-Achse. Entsprechendes gilt für die anderen Quadranten, so daß also alle raumartigen Vektoren in die mit „Zwischengebiet", alle zeitartigen in die mit „jenseits von O" bzw. „diesseits von O" bezeichneten Teile unserer Ebene fallen. Die Grenzen zwischen beiden Arten von Vektoren bilden die Geraden $x_1 = +x_4$ bzw. $x_1 = -x_4$. Diese Einteilung gilt unabhängig vom Koordinatensystem, d. h. ein raumartiger Vektor kann nicht zeitartig werden und umgekehrt, da, wie die Figur zeigt, die beiden Grenzgeraden ihre Lage unabhängig von jedem Koordinatensystem besitzen.

Für jeden raumartigen Vektor gibt es nun ein Koordinatensystem, für welches er eine rein räumliche Distanz darstellt. So ist z. B. OA in unserer Figur für das System K ein raumartiger Raum-Zeit-Vektor, im System K', auf dessen x'_1-Achse er liegt, ein räumlicher Abstand von der Länge $x'_1 = OA$, während $x'_4 = 0$ für O und A gilt. A ist „gleichzeitig" mit O geworden. Analog ist OB in K ein zeitartiger Raum-Zeit-Vektor, in K' ein rein zeit-

licher Abstand von der Länge $x'_4 = OB$, während für B und O nunmehr $x'_1 = 0$ ist, B also dauernd im räumlichen Anfangspunkt ruht. Umgekehrt können rein räumliche oder rein zeitliche Abstände bei geeigneter Koordinatenwahl in Raum-Zeit-Vektoren übergehen.

Ein wichtiger Unterschied zwischen raumartigen und zeitartigen Vektoren ist noch besonders hervorzuheben. Betrachten wir den raumartigen Vektor OD. Sein Endpunkt D wird im System K durch positive Werte x_1 und x_4 festgelegt; das Ereignis, das durch D dargestellt wird, liegt also zeitlich nach dem Ereignis O. Es gibt aber auch ein Koordinatensystem, in welchem D gleichzeitig mit O ist, und schließlich solche Systeme (in unserer Zeichnung gehört K' zu diesen), in denen die Koordinate x'_4 von D negativ wird, das Ereignis D zeitlich also vor O fällt. Sind zwei Ereignisse (Weltpunkte) O und D durch einen raumartigen Vektor verbunden, so gibt es Koordinatensysteme, in welchen O vor D, und solche, in welchen D vor O eintritt; in einem einzelnen System sind O und D gleichzeitig.

Anders bei einem zeitartigen Vektor. Hat sein Endpunkt (O sei der Anfangspunkt) als Zeitkoordinate einen positiven Wert x_4, so behält er diesen in jedem System. Das durch den Endpunkt dargestellte Ereignis folgt immer zeitlich auf O; der Endpunkt liegt jenseits von O. Ebenso bleibt ein Raumzeitpunkt mit negativem x_4 immer diesseits von O; das Ereignis geht O vorher. Die zeitartigen Vektoren weisen entweder in die Zukunft oder in die Vergangenheit. Jeder zeitartige Vektor kann durch geradlinige und gleichförmige Bewegung eines einzigen Raumpunktes zustande kommen.

Über die Geschwindigkeit, mit der sich ein solcher Punkt bewegt, können wir folgendes sagen. Sei diese v. Dann ist für den zeitartigen Vektor $x_1 = vt$ und $x_1^2 - x_4^2 = (v^2 - c^2)\, t^2 = - s^2$. Also ist $v < c$. Als Grenzwert tritt $v = c$ auf, wofür $x_1^2 - x_4^2 = 0$ ist. Die Geraden $x_1 = + x_4$ und $x_1 = - x_4$, welche der Fortbewegung mit Lichtgeschwindigkeit entsprechen, sind noch den zeitartigen Vektoren zuzurechnen. Für größere Werte von v wäre $x_1^2 - x_4^2 = + s^2$, der Vektor also raumartig. Ein solcher kann nicht durch Fortbewegung eines einzelnen Punktes entstehen.

Da wir die Bewegung jeder Masse oder Energie durch die Bewegung eines Punktes darstellen können, der zeitartige Raumzeit-

vektor also ein Symbol für alle (zunächst geradlinigen und gleichförmigen) Bewegungsvorgänge von Materie und Energie bedeutet, so folgt hieraus, daß **Materie und Energie sich nur mit einer Geschwindigkeit fortbewegen kann, die kleiner oder höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.** Auch die Gravitation z. B. kann sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Zu demselben Ergebnis können wir auch auf andere Weise gelangen. Ein Punkt möge sich mit der Geschwindigkeit $V > c$ fortpflanzen und zwar von A nach B längs der x-Achse des Systems K. Dann ist:

$$\Delta t = \frac{x_B - x_A}{V}. \tag{57}$$

Nach der Lorentz-Transformation (42) ist im System K':

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Delta t \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{58}$$

Da $V > c$ ist, kann man es durch geeignete Wahl von v erreichen, daß $\Delta t'$ null oder negativ wird. Es gäbe also Systeme, in welchen der Punkt von B sich nach A bewegte.

Die Lichtgeschwindigkeit kann also durch keinen sich fortbewegenden Punkt überschritten werden. Kein Bewegungsvorgang materieller oder energetischer Natur kann mit größerer als der Lichtgeschwindigkeit erfolgen.

Diese spielt daher in der Relativitätstheorie die Rolle einer Grenzgeschwindigkeit, ebenso wie die unendlich große Geschwindigkeit in der klassischen Physik. Wir werden darauf noch einmal in etwas anderem Zusammenhang im nächsten Paragraphen zurückkommen (S. 51).

Daß keine Bewegung der angegebenen Art mit größerer als der Lichtgeschwindigkeit erfolgen kann, geht noch unmittelbar aus der Lorentz-Transformation [Gleichungen (42) und (43)] selbst hervor. Denn denken wir uns mit dem sich fortbewegenden Punkt ein Koordinatensystem fest verbunden, so würde diese für $v > c$ auf imaginäre Raumkoordinaten führen. In der Tat sind auch nirgends in der Natur größere Geschwindigkeiten als die des Lichtes beobachtet worden.

Alle für die $x_1\, x_4$-Ebene gefundenen Verhältnisse lassen sich nun ohne weiteres auf die vierdimensionale Welt übertragen, da die Koordinaten x_2 und x_3 von der Lorentz-Transformation gar nicht betroffen werden. Alle Weltvektoren zerfallen in raumartige und zeitartige von genau den eben geschilderten Eigenschaften. Die Grenze wird von Vektoren gebildet, die dem Fortschreiten eines Punktes mit Lichtgeschwindigkeit entsprechen. Geometrisch gesprochen zerfällt die vierdimensionale Welt in einen Teil jenseits von O, in welchem alle Punkte liegen, die von O ausgehen; einen Teil diesseits von O, der alle Punkte enthält, die zu O sich hinbewegen; sowie ein Zwischengebiet, in welchem alle Punkte sich befinden, die mit O „gleichzeitig“ sein können. Die Trennung erfolgt durch die beiden Mäntel eines vierdimensionalen Kegelraumes $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$, den Vorkegel und Nachkegel. Der erstere umfaßt alle Punkte, die mit Lichtgeschwindigkeit zu O hineilen, der zweite solche, die mit Lichtgeschwindigkeit von O ausgehen. Diese Einteilung aller von einem Punkt ausgehenden Raum-Zeit-Vektoren gilt für jedes beliebige Koordinatensystem K, K' usw.

Die ganzen soeben gegebenen Ableitungen können wir ohne weiteres auf den für die allgemeine Relativitätstheorie wichtigen Fall übertragen, daß der Weltpunkt x_1, x_2, x_3, x_4 dem Koordinatenanfangspunkt unendlich benachbart liegt. Seine Koordinaten bzw. die Komponenten des entsprechenden unendlich kleinen Vektors sind dann dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 und der Raum-Zeit-Abstand ist festgelegt durch:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \tag{59}$$

Wir bezeichnen die Größe ds als das Linienelement einer Raum-Zeit-Kurve oder Weltlinie. Die Weltlinie ist aus beliebigen, unendlich kleinen Raum-Zeit-Vektoren zusammengesetzt. Je nachdem $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \gtreqless dx_4^2$ ist, unterscheiden wir wieder raum- und zeitartige Vektoren; die Einteilung der Welt in die durch Vor- und Nachkegel getrennten zeitartigen Teile diesseits und jenseits von O und das raumartige Zwischengebiet bleibt für die unendlich kleine Umgebung unseres als Koordinaten-Anfang gewählten Punktes bestehen. Da ds^2 gegen die Lorentz-Transformation invariant ist, so gilt die Einteilung wieder unabhängig vom Koordi-

natensystem. Für einen zeitartigen Vektor können wir auch schreiben:

(60) $ds^2 = dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2;\ dx_4^2 > dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$

Der Abstand ds für einen zeitartigen Vektor kann aus den Elementen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 eines einzelnen sich beliebig bewegenden Punktes gebildet werden. Das zeitartige Linienelement (60) charakterisiert also die willkürliche Bewegung eines Punktes.

Das Element der Eigenzeit des sich beliebig bewegenden Punktes ist analog (52):

(61) $$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} = dt\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}},$$

oder für die Zeiteinheit, für welche $c = 1$ ist, analog (54):

(62) $$ds = \sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)} = dx_4\sqrt{1 - v^2}.$$

Hierbei ist q bzw. v die momentane Geschwindigkeit des Punktes in demjenigen System, in welchem seine augenblickliche Bewegung durch dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 ($= c\,dt$) beschrieben wird.

Die Eigenzeit des Weltlinienelementes ist eine Invariante der Lorentz-Transformation [vgl. (46)].

§ 5. Geometrische und mechanische Folgerungen aus der Lorentz-Transformation.

Die spezielle Relativitätstheorie ist identisch mit der Forderung der Invarianz der Naturgesetze gegen die Lorentz-Transformation. Alle Folgerungen, die wir aus letzterer ziehen, geben uns in ihrer Gesamtheit notwendig dasjenige physikalische Weltbild, das wir als das „richtige“ ansehen müssen, wenn wir uns auf den Boden der speziellen Relativitätstheorie stellen.

Sehen wir zu, ob diese Forderungen sich im Rahmen dessen halten, was wir für unser Denken als möglich und für unsere Sinne als wirklich bezeichnen.

In der klassischen Mechanik betrachteten wir eine Länge (d. h. also für unsere Sinne die Länge eines Stabes oder einer auf das Papier gezeichneten Geraden) als konstant, gleichgültig ob wir sie in Ruhe oder in der Bewegung messen (vgl. S. 22). Dies war eine Annahme; denkmöglich ist auch das Gegenteil.

Nach der Relativitätstheorie gilt folgendes. Ein Stab, der in einem System K' ruht, möge die Länge l_0 haben; wir legen ihn

in die x_1'-Achse, die parallel der Richtung der Geschwindigkeit von K' gegen K verläuft. Die Endpunkte des Stabes seien $x_1^{0'}$ und $x_1^{1'}$. Dann ist:

$$l_0 = x_1^{1'} - x_1^{0'} = \Delta x_1'. \tag{63}$$

Wir messen seine Länge in K nach dem S. 23 gegebenen Verfahren. Wir verwenden die Lorentz-Transformation (37), in welcher für K die Zeit $x_4 = ct$ für beide Endpunkte (deren Koordinaten x_1^0 und x_1^1 sind) denselben Wert hat. Also ist:

$$x_1^{1'} - x_1^{0'} = (x_1^1 - x_1^0) : \sqrt{1-\beta^2}; \tag{64}$$

oder wenn wir die Länge des Stabes in K mit l bezeichnen:

$$l = l_0 \sqrt{1-\beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{65}$$

l ist die Länge desselben Stabes in K, der in K' die Länge l_0 besitzt; in bezug auf K befindet sich der Stab in geradliniger und gleichförmiger Bewegung längs seiner Richtung mit der Geschwindigkeit v. l und l_0 sind dabei in K bzw. K' mit denselben Maßstäben gemessen; dies ist so zu verstehen, daß zwei Maßstäbe, die in K dieselbe Länge besitzen, diese auch in zwei verschiedenen Systemen K und K' für dort sich befindende Beobachter behalten, wenn der eine Maßstab in K, der andere in K' ruht (vgl. S. 25).

Aus (65) folgt, daß der gegen K bewegte Stab, wenn er in der Richtung der Geschwindigkeit liegt, eine Verkürzung im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}$, gemessen vom System K aus, erfährt. Die Lorentz-Kontraktion (vgl. S. 17) wird so zu einer Folge des Relativitätsprinzips. Je größer v ist, desto kürzer erscheint der Stab im System K; bewegt er sich mit Lichtgeschwindigkeit, so wird seine Länge null. Kommt er dagegen in K zur Ruhe, so wird hier seine Länge l_0. Die Länge eines Stabes ist — in notwendiger Übereinstimmung mit den vorhergehenden Ausführungen über die Maßstäbe — für jedes System, in welchem er ruht, eine Konstante l_0, die wir als Ruhlänge bezeichnen.

Liegt der Stab bei seiner Bewegung senkrecht zur Bewegungsrichtung, so ergibt sich nach der Lorentz-Transformation dieselbe Länge l_0, gleichgültig, ob er vom ruhenden System K oder vom mitbewegten aus gemessen wird. Jeder in beliebiger Lage sich befindende Stab erscheint von K aus gemessen so weit verkürzt,

als es der in die Bewegungsrichtung fallenden Komponente seiner Länge entspricht.

Hieraus folgt auch, daß die Winkel zwischen zwei Geraden im allgemeinen in verschiedenen Systemen verschiedene Größen besitzen.

Sind anfangs im System K zwei gleichlange, parallele, ruhende Maßstäbe l_1 und l_2 vorhanden, und wird der eine, l_2, jetzt mit konstanter Geschwindigkeit in seiner Längsrichtung bewegt (ruht also nun in einem System K') so erscheint er, in K mit l_1 gemessen, verkürzt. Mißt man jedoch l_1 in K' mit dem Maßstab l_2, so erscheint umgekehrt l_1 verkürzt. Sobald beide Maßstäbe in demselben System zur Ruhe kommen, besitzen sie wieder dieselbe Länge.

Jeder Körper, der sich relativ zu K so bewegt, daß er in K' ruht, zeigt in der Bewegungsrichtung eine Verkürzung. Sein Volumen, gemessen von K aus, ist gegeben durch:

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{66}$$

wo V_0 das Ruhvolumen bedeutet. Ein Elektron, das in der Ruhe Kugelgestalt besitzt, plattet sich bei gleichförmiger Translation in der Bewegungsrichtung ab. Die Relativitätstheorie führt so unmittelbar zu der schon von H. A. Lorentz in die Elektrodynamik eingeführten Form des Elektrons[1]); die hierauf gegründeten Bewegungsgesetze für die Elektronen in Kathoden- und β-Strahlen stehen mit den Versuchsergebnissen in Übereinstimmung (vgl. § 9).

Daß die vorstehenden Folgerungen mit der Wirklichkeit übereinstimmen, zeigt der Michelsonsche Versuch, auf den die Herleitung der Lorentz-Transformation gegründet ist. Die Lichtgeschwindigkeit kann in jedem der Systeme $K, K' \ldots$ nur dann denselben konstanten Wert c besitzen, wenn die Länge in der angegebenen Weise von der Geschwindigkeit, mit der sie sich bewegt, abhängt. Auch wenn wir uns gar nicht auf den Standpunkt der Relativitätstheorie, sondern den der älteren Elektronentheorie stellen, ist die Annahme, daß ein in seiner Längsrichtung bewegter Stab sich im Verhältnis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} : 1$ verkürzt, gemessen vom ruhenden System aus, zur Erklärung des Michelsonschen Versuches unerläßlich (vgl. S. 17).

[1]) M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. Bd., 3. Aufl., Leipzig 1914, S. 181.

Von tiefgehender Bedeutung ist diese erste aus der Lorentz-Transformation entwickelte Forderung der Relativität der Längen für die Geometrie. Wir verlangen von den geometrischen Sätzen, daß sie der Wirklichkeit entsprechen. Also müssen auch geometrische Strecken verschiedene Länge besitzen, je nachdem sie in einem System K ruhen oder sich relativ zu diesem geradlinig und gleichförmig bewegen. Die Größe von Winkeln und die Gestalt von geometrischen flächenhaften oder räumlichen Gebilden hängt vom Bewegungszustand ab.

Die Sätze der gesamten Euklidischen Geometrie der Ebene und des Raumes gelten **ausschließlich für geometrische Gebilde, die sich relativ zueinander in Ruhe befinden.**

Die zweite Forderung aus der Lorentz-Transformation bezieht sich auf die Zeit. Daß die Zeit in der Relativitätstheorie im Gegensatz zur klassischen Physik ein relativer Begriff ist, wurde schon früher (S. 22) erörtert. Wir können nun genauere Beziehungen zwischen den in verschiedenen Systemen geltenden Zeiten herleiten. Die Zeit ist in jedem System durch alle Uhren festgelegt, die in diesem synchron laufen. Wir brauchen also immer nur eine Uhr, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems K, K' ... ruht, zu betrachten.

Eine in K' ruhende Uhr gehe von t'_0 bis $t'_1 = t'_0 + \Delta t'$; die entsprechende Differenz der Zeitkoordinaten ist dann $\Delta x'_4 = x_4^{1'} - x_4^{0'}$. Die räumlichen Koordinaten in K' sind für t'_0 und t'_1 null. Also ergibt die Lorentz-Transformation (40) für die Differenz der zeitlichen Koordinaten in K:

$$(67) \qquad \Delta x_4 = x_4^1 - x_4^0 = \frac{\Delta x'_4}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

oder für die Differenz der Uhrenangaben selbst:

$$(68) \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

$\Delta t'$ ist die Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignissen (den Stellungen der Uhrzeiger) in dem gegen K bewegten System K'. Während dieser Zeit läuft die Uhr in K um Δt weiter. Dabei wird die Zeit in K und K' mit zwei gleichgehenden Uhren gemessen (vgl. S. 25); ebenso wie bei Maßstäben nehmen wir an, daß die beiden

Meßuhren, die gleich laufen, solange sie in K ruhen, auch dann gleich laufen, wenn die eine in K, die andere in K' ruht, und zwar für Beobachter in K bzw. K'. Anders liegen nach Gleichung (68) die Dinge, wenn die in einem System K' ruhende Uhr (die an Stelle irgendeines gleichmäßig ablaufenden Ereignisses tritt) mit einer gleichartigen Uhr in K verglichen wird. Es ist $\Delta t > \Delta t'$. Die mit K' bewegte Uhr geht also langsamer; sie bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung für einen Beobachter in K hinter der in K ruhenden Uhr zurück. Ein Ereignis läuft in K' langsamer ab als in K. Der Betrag des Zurückbleibens hängt wieder von der Größe der Geschwindigkeit v von K' gegen K ab. Je größer die Geschwindigkeit, desto langsamer geht die Uhr; für $v = c$ kommt sie zum Stillstehen. Gelangt dagegen die Uhr in K zur Ruhe, so geht sie ebenso wie die bereits in K ruhende Uhr.

Befinden sich nun in K zwei gleiche (zuerst ruhende) Uhren A und B, und bewegen wir dann B mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig erst von A weg und dann wieder nach A zurück, so wird die Uhr B während der Bewegung dauernd hinter A zurückbleiben und nach ihrer Rückkehr gegen A nachgehen. Ebenso wird, wenn wir A von B weg und wieder dahin zurückführen, A gegen B nachgehen. Hierin liegt scheinbar ein Paradoxon. Betrachten wir noch einmal den ersten Vorgang, bei welchem B gegen A bewegt wird. Da die Bewegung der beiden Uhren eine relative ist, können wir ebensogut sagen, A bewegt sich gegen B und wir hätten damit den zweiten Vorgang. Es müßte also die Uhr B gegen A und gleichzeitig A gegen B nachgehen, was unmöglich ist.

In Wirklichkeit sind aber die beiden Vorgänge grundsätzlich voneinander verschieden. Beim ersten erfährt B durch eine Kraft erst eine Beschleunigung von A weg, bis die konstante relative Geschwindigkeit erreicht ist; dann wird durch eine in umgekehrter Richtung wirkende, beschleunigende Kraft die Geschwindigkeit in ihrer Richtung umgekehrt und schließlich durch eine weitere Kraft die Uhr B zur Ruhe gebracht. A bleibt unbeeinflußt. Beim zweiten Vorgang wirken die Kräfte dagegen auf A, und B wird nicht beeinflußt. Es sind also zwei physikalisch verschiedene Vorgänge, die nach ihrem Ablauf in bezug auf den relativen Stand der beiden Uhren zu verschiedenen Ergebnissen führten. Eine genauere Erklärung der bei den Beschleunigungen eintretenden Wirkungen auf

den Gang der Uhren wird erst im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie möglich sein (vgl. II. Teil § 10). Hier kann nur noch hervorgehoben werden, daß **während** der relativen, **geradlinigen und gleichförmigen Bewegung** von A gegen B sowohl beim ersten als auch beim zweiten Vorgang, die Uhr A für einen Beobachter bei B und die Uhr B für einen solchen bei A nachgeht; dies ist die einzige Folgerung, die aus dem speziellen Relativitätsprinzip bzw. der Lorentz-Transformation zu ziehen möglich ist, da sie lediglich Aussagen über die Zeit in Systemen enthält, die sich relativ zueinander in gleichförmiger Translation befinden. Daß das Zurückbleiben der bewegten Uhr gegen die ruhende eine objektiv gültige Erscheinung ist, können wir noch auf eine andere Weise darlegen. Wir denken uns zwei Weltpunkte 1 und 2, die wir durch eine Weltlinie (vgl. S. 40) verbinden. Das eine Mal möge es eine **gerade Weltlinie** sein. Wir wählen unser Koordinatensystem so, daß die Weltgerade mit der x_4-Achse zusammenfällt (vgl. S. 32), d. h. wir betrachten eine Uhr, die dauernd in einem System K ruht; die Punkte 1 und 2 sind dann durch Anfangs- und Endstellung des Uhrzeigers gegeben. Ihnen entsprechen zwei Punkte der x_4-Achse unseres Systems K, von denen der erste in den Nullpunkt fallen möge. Die Eigenzeit der geraden Weltlinie ist nach (61):

$$\tau_1 = \frac{1}{c}\int_1^2 dx_4, \tag{69}$$

wobei das Integral längs der x_4-Achse zu nehmen ist.

Wir gehen nun von 1 nach 2 in demselben soeben gewählten Koordinatensystem K, aber auf einem krummlinigen Raum-Zeit-Weg. Wir betrachten mit anderen Worten von K aus eine Uhr, die im Punkt 1 in K ruht, sich dann relativ zu K hin- und herbewegt und in Punkt 2 in K wieder zur Ruhe kommt. Die Eigenzeit jedes Weltlinienelements ist nach (61) anzusetzen; die gesamte Eigenzeit der krummen Weltlinie ist also[1]):

$$\tau_2 = \frac{1}{c}\int_1^2 \sqrt{dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}. \tag{70}$$

[1]) Hierbei ist von einem Einfluß der Beschleunigungen auf die bewegte Uhr abgesehen.

Dabei ist auch für diese Weltlinie der Betrag $\frac{1}{c}\int_1^2 dx_4$ derselbe wie für die Weltgerade, denn er bedeutet den Abstand x_4 der Punkte 1 und 2, d. h. den zeitlichen Abstand der beiden Punkte, gemessen durch eine in K ruhende Uhr.

Dann ist aber $\tau_2 < \tau_1$. Die gerade Weltlinie hat demnach die längste Eigenzeit. Diese entspricht der Angabe einer in K ruhenden Uhr. Jede andere Uhr, welche die soeben beschriebene Bewegung gegen K ausführt, zeigt bei der Rückkehr zur ersten Uhr einen geringeren Zeitablauf, ist also gegen die erste Uhr nachgegangen.

Die für den Gang von Uhren aus der Lorentz-Transformation gezogenen Folgerungen gelten natürlich für den zeitlichen Ablauf beliebiger Vorgänge. Ein Beispiel, das die Verhältnisse besonders scharf hervortreten läßt, hat Einstein[1]) gegeben. „Wenn wir einen lebenden Organismus in eine Schachtel hineinbrächten und ihn dieselbe Hin- und Herbewegung ausführen ließen wie vorher die Uhr, so könnte man es erreichen, daß dieser Organismus nach einem beliebig langen Fluge beliebig wenig geändert wieder an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt, während ganz entsprechend beschaffene Organismen, welche an den ursprünglichen Orten ruhend geblieben sind, längst neuen Generationen Platz gemacht haben. Für den bewegten Organismus war die lange Zeit der Reise nur ein Augenblick, falls die Bewegung annähernd mit Lichtgeschwindigkeit erfolgte."

Ein Vergleich der zweiten durch die Lorentz-Transformation gestellten Forderung mit der Wirklichkeit ist im allgemeinen nicht möglich, da die in der Natur vorkommenden Geschwindigkeiten v meist sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Natürlich stehen die bezüglich der Zeit gezogenen Folgerungen im Einklang mit den Ergebnissen des Michelson-Versuches, der ja die Grundlage der Lorentz-Transformation bildet. Große Geschwindigkeiten finden wir jedoch bei den verschiedenen Strahlungen elektrischer Natur, und hier läßt sich vielleicht in absehbarer Zeit eine Nachprüfung der Theorie durchführen. Ein Atom ist nichts anderes

[1]) Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zürich, Bd. 56, 1911, S. 12. Zürich 1912.

als eine Uhr; seine Schwingungsdauer kann als Zeiteinheit gewählt werden. Zwei gleiche Atome, ob ruhend oder bewegt, besitzen dieselbe Schwingungsdauer ausgedrückt in Eigenzeit. Der Vergleich der Schwingungsdauer eines ruhenden und eines bewegten Atoms in demselben System muß also den von der Lorentz-Transformation geforderten Unterschied ergeben.

Eine dritte Forderung des speziellen Relativitätsprinzips führt zu dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Es ist der experimentellen Nachprüfung zugänglich.

In der klassischen Mechanik galt das Additionstheorem (3) oder (16). Wir addierten dort die Geschwindigkeit eines Massenpunktes in K' und die Geschwindigkeit des Systems K' gegen K selbst wie zwei gleichartige Größen zu einer in K geltenden Geschwindigkeit. In der Relativitätstheorie ändern sich Länge und Zeit, wenn wir von K aus Vorgänge in K' betrachten; es ist also auch zu erwarten, daß das einfache Additionstheorem nicht mehr gilt.

Zur Herleitung des neuen Theorems wählen wir der größeren Anschaulichkeit halber die ältere Bezeichnung der Raum-Zeit-Koordinaten und setzen die Geschwindigkeitskomponenten von $\mathfrak{q}$ im System K:

$$(71)\qquad \mathfrak{q}_x = \frac{dx}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_y = \frac{dy}{dt}, \qquad \mathfrak{q}_z = \frac{dz}{dt};$$

entsprechend sind:

$$(72)\qquad \mathfrak{q}'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad \mathfrak{q}'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad \mathfrak{q}'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

die Geschwindigkeiten in K'.

Aus der Lorentz-Transformation (42) folgt:

$$(73)\qquad \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'}, \qquad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dt'},$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Also:

$$(74)\qquad \mathfrak{q}'_x = \frac{\mathfrak{q}_x - v}{1 - \frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}'_y = \frac{\mathfrak{q}_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}'_z = \frac{\mathfrak{q}_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v\,\mathfrak{q}_x}{c^2}},$$

oder entsprechend aus (43):

$$(75)\quad \mathfrak{q}_x = \frac{\mathfrak{q}'_x + v}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}_y = \frac{\mathfrak{q}'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}, \qquad \mathfrak{q}_z = \frac{\mathfrak{q}'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\,\mathfrak{q}'_x}{c^2}}.$$

Die Gleichungen (74) und (75) stellen das Einsteinsche Additionstheorem dar; sie treten an Stelle des Satzes (16), der in der hier gebrauchten Bezeichnung $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} + \mathfrak{v}$ lautet. Sie gelten für die S. 25 getroffene spezielle Wahl der Koordinatensysteme.

Für die absoluten Beträge erhalten wir die Gleichung[1]):

$$(76)\qquad q^2 = \frac{q'^2 + v^2 + 2\,q'v\cos\vartheta' - \left(\frac{q'v}{c}\sin\vartheta'\right)^2}{\left(1 + \frac{q'v}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2}$$

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\sqrt{\mathfrak{q}'^2_y + \mathfrak{q}'^2_z}}{\mathfrak{q}_x}.$$

Beschränken wir uns auf einen Vorgang, der sich längs der x-Achse fortpflanzt, für den also $\mathfrak{q}_y = \mathfrak{q}'_y = 0$ und $\mathfrak{q}_z = \mathfrak{q}'_z = 0$ wird, so bleibt nur die erste der Gleichungen (74) oder (75) bestehen.

Wir wollen die Richtigkeit unserer Beziehungen durch den Fizeauschen Versuch nachprüfen.

Ein Lichtstrahl besitzt in einer ruhenden Substanz, deren Brechungsindex n ist, die Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$; wird die Substanz mit der Geschwindigkeit v bewegt und zwar in der Richtung des Lichtstrahles oder entgegengesetzt derselben, so ist die Geschwindigkeit des Lichtes bezogen auf das Koordinatensystem des Beobachters, relativ zu welchem die Substanz sich bewegt, nicht, wie das Additionstheorem der klassischen Mechanik erwarten ließe, $\frac{c}{n} \pm v$, sondern zufolge des Experiments $\frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, wo $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ der Fresnelsche Mitführungskoeffizient ist.

Dieses Ergebnis ist die unmittelbare Folge von (75). Die Geschwindigkeit v ist diejenige unseres Systems K' (= bewegte Sub-

[1]) Gleichung (76) ergibt sich durch Quadrieren und Addieren von (75). Vgl. A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, § 5 (Annal. d. Phys. Bd. 17, 1905 oder Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Leipzig 1915) oder auch M. Laue, Das Relativitätsprinzip.

stanz) gegen K (= ruhender Beobachter). Die Geschwindigkeit des Lichtes in K' ist $\mathfrak{q}'_x = \frac{c}{n}$.

Hieraus folgt, je nachdem die Geschwindigkeit v dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{q}'_x$ hat, nach (75):

(77) $$\mathfrak{q}_x = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{cn}} = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Hierbei sind die Glieder zweiter Ordnung in $\frac{v}{c}$ gegen die Glieder erster Ordnung als sehr kleine Größen vernachlässigt. Der Fizeausche Versuch ist also eine experimentelle Bestätigung des Einsteinschen Additionstheorems und damit der Lorentz-Transformation.

Es sei aber hervorgehoben, daß auch die Elektronentheorie imstande ist, den Fizeauschen Versuch zu erklären. Wesentlich ist dabei die Annahme, daß es für ihre Grundgleichungen ein bevorzugtes System, das des ruhenden Äthers, gibt[1]. So ist gerade dieser Versuch lange Zeit als Beweis für die Existenz des ruhenden Äthers angesehen worden. Aber unser Additionstheorem zeigt, daß diese Annahme zur Erklärung des Fizeauschen Versuches durchaus nicht notwendig ist.

Wir wollen nun aus der ersten der Gleichungen (75) noch einige weitere Folgerungen ziehen, indem wir wieder die Bewegungsvorgänge parallel der x-Achse annehmen wollen.

Ein Ereignis möge sich im System K' mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'_x < c$ fortpflanzen; ebenso sei die Relativgeschwindigkeit beider Systeme (K und K') $v < c$. Beide Geschwindigkeiten haben dieselbe Richtung.

Wir setzen:

(78) $$\mathfrak{q}'_x = c - k, \qquad v = c - l; \qquad k \text{ und } l > 0.$$

Dann ist nach (75) die „Summe" beider Geschwindigkeiten in K:

(79) $$\mathfrak{q}_x = c\,\frac{2c - k - l}{2c - k - l + \frac{kl}{c}} < c.$$

[1]) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität 2. Bd., 3. Aufl., S. 295.

Zwei Unterlichtgeschwindigkeiten, wovon die eine sich auf ein Ereignis in K', die andere auf K' selbst bezieht, geben zueinander addiert im System K wieder eine Unterlichtgeschwindigkeit.

Setzt man $k = 0$, so ist $\mathfrak{q}_x = c$, eine nach den Voraussetzungen selbstverständliche Folgerung der Lorentz-Transformation. Aber auch für $l = 0$ wird $\mathfrak{q}_x = c$. Eine Unterlichtgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit addiert gibt wieder eine Lichtgeschwindigkeit. Es zeigt sich also auch hier wieder, ebenso wie S. 39, daß die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit ist, die der unendlichen großen Geschwindigkeit der klassischen Mechanik entspricht.

Addiert man dagegen zwei Geschwindigkeiten in demselben System, beobachtet man z. B. die Fortpflanzung eines Lichtstrahles in K relativ zu einem sich in K bewegenden Körper, so gilt das Additionstheorem der klassischen Mechanik. Man erhält dann bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung beider eine relative Geschwindigkeit, die größer als c ist. Dabei bleibt aber jede Geschwindigkeit für sich getrennt beobachtbar; ein Widerspruch zu der Aussage, größere Geschwindigkeiten als die des Lichtes kommen bei den Bewegungsvorgängen von Materie oder Energie in der Natur nicht vor, besteht also nicht.

So hat die Lorentz-Transformation zu einer Reihe von Folgerungen geführt, die zwar ungewohnt sind, aber dem folgerichtigen Denken nicht widersprechen. Sie stehen in Übereinstimmung mit dem Geschehen in der Natur und vermögen Versuche wie den von Michelson oder Fizeau in einfacherer Weise (weil aus einem Prinzip heraus) zu beschreiben als die Elektronentheorie.

Daß die durch die Lorentz-Transformation dargestellte spezielle Relativitätstheorie sowohl wie die Elektronentheorie die Erscheinungen wiederzugeben vermag, hat seinen tieferen Grund darin, daß beide prinzipiell identisch sind. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik in der Maxwell-Lorentzschen Form gehorchen dem speziellen Relativitätsprinzip; also müssen alle Erscheinungen, die durch jene dargestellt werden, auch durch die Relativitätstheorie erklärt werden können.

Doch bevor wir uns dem Nachweis der Invarianz der Grundgleichungen der Elektrodynamik zuwenden können, müssen wir uns mit den dazu notwendigen mathematischen Hilfsmitteln vertraut machen. Wir wenden uns zuerst noch einmal der älteren Vektoranalysis zu.

§ 6. Übersicht über die ältere Vektor- und Tensoranalysis. Grundgleichungen der Elektrodynamik.

Der Begriff des *Vektors*, sowie die Sätze über die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren und über die Addition von Vektoren wurden bereits in § 1 (S. 11 u. 12) erläutert. Wir müssen uns jetzt noch etwas weiter mit Vektoranalysis beschäftigen[1]).

Wir leiten zuerst die Sätze über die *Multiplikation von Vektoren* her. Wir kennen in der Physik *zwei Arten* von Produkten von Vektoren.

Wir bezeichnen das Produkt des Vektors Kraft ($\mathfrak{a}$) mit dem Vektor Weg ($\mathfrak{b}$) als Arbeit. Bilden die Richtungen von Kraft und Weg einen Winkel ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}$) miteinander, so ist die Arbeit:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{80}$$

Arbeit ist ein Skalar; $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ heißt demnach *skalares Produkt* der beiden Vektoren. Es ist durch (80) definiert. Es folgt hieraus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$.

Wir nennen ferner das Produkt des Vektors Kraft ($\mathfrak{a}$) mit dem Vektor Hebelarm ($\mathfrak{b}$) das statische Moment oder Drehungsmoment. Bilden die beiden Vektoren wieder einen Winkel ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}$), so ist das Drehungsmoment:

$$\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,\bar{\mathfrak{c}}. \tag{81}$$

Das Drehungsmoment ist ein Vektor; $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ heißt deshalb *Vektorprodukt* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Seine Definition ist durch (81) gegeben. Der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ ist $|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Seine Richtung ist die Senkrechte zur Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und zwar diejenige, für welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der hingeschriebenen Reihenfolge ein Rechtssystem wird. Hierbei gehen wir von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ durch die kürzeste Drehung. In (81) ist diese *Richtung* durch die Bezeichnung $\bar{\mathfrak{c}}$ festgelegt; $\bar{\mathfrak{c}}$ bedeutet einen Vektor von der angegebenen Richtung und der Länge 1 (Einheitsvektor). Bildet man das Vektorprodukt $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$,

[1]) An dieser Stelle können nur die hauptsächlichsten Resultate gegeben werden. Für etwas eingehendere Beschäftigung sei z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis 3. Aufl. Leipzig 1913 oder S. Valentiner, Vektoranalysis. Sammlung Göschen Nr. 354 empfohlen. Das Buch von Gans enthält zugleich eine Zusammenstellung der wichtigsten Gleichungen der Elektrodynamik, auf welche im folgenden auch nur hingewiesen werden kann.

so müssen die Vektoren in der Reihenfolge $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ ein Rechtssystem ergeben; die Richtung von $\mathfrak{c}$ hat sich umgekehrt. Es ist $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$.

Das Vektorprodukt ist ein Vektor ganz anderer Art als die zuerst definierten Vektoren. Während letztere ihr Vorzeichen ändern, wenn sämtliche Achsen eines Koordinatensystems ihre Richtung umkehren (polare Vektoren), bleibt für Vektoren von der Art des Vektorprodukts das Zeichen ungeändert (achsiale Vektoren).

Das skalare und vektorielle Produkt zweier Vektoren läßt sich nun auch durch deren Komponenten darstellen.

Seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren, die ein Cartesisches Koordinatensystem festlegen, so läßt sich zufolge des Satzes über die Addition von Vektoren (S. 12) jeder Vektor in die Form bringen:

(82) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z \mathfrak{k},$$

wo $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ die Vektorkomponenten in unserem Cartesischen System sind.

Nach (80) und (81) ist nun:

(83) $$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1, \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0$$

und:

(84) $$\begin{aligned} &[\mathfrak{i}\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\mathfrak{k}] = 0, \qquad &[\mathfrak{i}\mathfrak{j}] = -[\mathfrak{j}\mathfrak{i}] = \mathfrak{k}, \\ &[\mathfrak{j}\mathfrak{k}] = -[\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = \mathfrak{i}, \qquad &[\mathfrak{k}\mathfrak{i}] = -[\mathfrak{i}\mathfrak{k}] = \mathfrak{j}. \end{aligned}$$

Demnach ist, wenn wir die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ skalar bzw. vektoriell multiplizieren:

(85) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z \mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{b}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{b}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{b}_z \mathfrak{k}) = \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_z$$

und:

(86) $$\begin{aligned} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= [\mathfrak{a}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{a}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{a}_z \mathfrak{k},\ \mathfrak{b}_x \mathfrak{i} + \mathfrak{b}_y \mathfrak{j} + \mathfrak{b}_z \mathfrak{k}] = \\ &(\mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_z - \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_y)\mathfrak{i} + (\mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_x - \mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_z)\mathfrak{j} + (\mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_y - \mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_x)\mathfrak{k} = \\ &\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \\ \mathfrak{b}_x & \mathfrak{b}_y & \mathfrak{b}_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Größen $(\mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_z - \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_y)$ usw. sind die Komponenten des Vektorprodukts; man bezeichnet sie auch mit $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_x$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_y$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_z$.

Am wichtigsten für die Relativitätstheorie ist das skalare Produkt in seiner Komponentendarstellung (85). Gehen wir nämlich von unserem Cartesischen Koordinatensystem durch Drehung in ein

anderes über, in welchem die Vektorkomponenten von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}'_x$, $\mathfrak{a}'_y$, $\mathfrak{a}'_z$ bzw. $\mathfrak{b}'_x$, $\mathfrak{b}'_y$, $\mathfrak{b}'_z$ bezeichnet werden, so ist:

(87) $$\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z = \mathfrak{a}'_x\mathfrak{b}'_x + \mathfrak{a}'_y\mathfrak{b}'_y + \mathfrak{a}'_z\mathfrak{b}'_z.$$

Das skalare Produkt ist gegenüber einer Drehung des Cartesischen Koordinatensystems invariant; sein Wert eine Invariante. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der Definitionsgleichung (80).

Doch können wir uns auch auf folgende Weise davon überzeugen.

Bei einer Drehung aus einem orthogonalen System in ein anderes gelten für die Koordinaten eines Punktes die linearen homogenen Transformationsgleichungen:

(88) $$\begin{aligned} x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z = \frac{\partial x'}{\partial x}x + \frac{\partial x'}{\partial y}y + \frac{\partial x'}{\partial z}z \\ y' &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z = \frac{\partial y'}{\partial x}x + \frac{\partial y'}{\partial y}y + \frac{\partial y'}{\partial z}z \\ z' &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z = \frac{\partial z'}{\partial x}x + \frac{\partial z'}{\partial y}y + \frac{\partial z'}{\partial z}z, \end{aligned}$$

wobei zwischen den Koeffizienten die Orthogonalitätsbedingungen bestehen müssen:

(89) $$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{m=3}\alpha_{mn}^2 = +1 \qquad (n = 1, 2, 3) \\ &\sum_{m=1}^{m=3}\alpha_{mn}\alpha_{mo} = 0 \qquad (n, o = 1, 2, 3;\ n \neq o). \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Koeffizienten $\frac{\partial x'}{\partial x}$ usw., die im ganzen Raum Konstante sind.

Zufolge dieser Orthogonalitätsbedingungen wird $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$, oder für die Koordinaten zweier verschiedener Punkte: $x'_1x'_2 + y'_1y'_2 + z'_1z'_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nun sind die Vektorkomponenten $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ und $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$ nichts anderes als die Koordinaten zweier Punkte im Cartesischen System.

Die Vektorkomponenten transformieren sich also nach den Gleichungen (88) unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingungen (89). Das skalare Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z$ ist

demnach invariant. Nun mögen in einem Cartesischen Koordinatensystem alle Komponenten eines Vektors null sein; also:

(90) $$\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_y = \mathfrak{a}_z = 0.$$

Sei $\mathfrak{b}$ irgendein beliebiger anderer Vektor, dessen Komponenten von null verschieden sind; dann ist in unserem Koordinatensystem $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$. Diese Beziehung gilt zugleich für alle Cartesischen Koordinatensysteme, die wir durch Drehung aus dem einen erhalten. Da unser Vektor $\mathfrak{b}$ in einem anderen System die im allgemeinen von null verschiedenen Komponenten $\mathfrak{b}'_x$, $\mathfrak{b}'_y$, $\mathfrak{b}'_z$ hat, so ist auch:

(91) $$\mathfrak{a}'_x = \mathfrak{a}'_y = \mathfrak{a}'_z = 0.$$

Sind alle Komponenten eines Vektors in einem Cartesischen Koordinatensystem null, so sind sie es — wie bereits aus der Vektordefinition S. 11 folgte — in jedem anderen, das daraus durch eine Drehung hervorgeht. Wir können, wie S. 11, die Beziehungen (90) und (91) durch:

(92) $$\mathfrak{a} = 0$$

ersetzen. Die Richtigkeit dieses Satzes ist an die Invarianz von (87) gebunden, gilt also zunächst nur für Cartesische Systeme. Die Erweiterung auf allgemeinere Koordinatensysteme wird erst der folgende Paragraph ergeben. Man kann die Invarianzbedingung (87) auch benützen, um einen Vektor zu definieren. Drei beliebige Größen oder analytische Ausdrücke bilden dann einen Vektor, wenn sie mit den Komponenten eines willkürlich gewählten Vektors die Gleichung (87) erfüllen. Ist nun ein Naturgesetz, durch eine Gleichung (92) oder drei Gleichungen (90) gegeben, so behält es — man beachte die Ausführungen S. 11 — bei der Transformation (88) und (89) seine Form. $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ bedeuten hierbei die Vektorkomponenten in jedem durch die Transformationsgleichungen festgelegten System. Ein Naturgesetz, das durch Nullsetzen aller Komponenten eines dreidimensionalen Vektors gebildet wird, ist gegen homogene lineare und orthogonale Transformationen invariant. Der Beweis für die Invarianz eines Naturgesetzes ist also durch die Vektorschreibweise bereits erbracht. Wir haben als Beispiel schon das mechanische Grundgesetz (14) kennen gelernt.

Das Vorstehende gilt natürlich auch für Gesetze, die in der Gleichsetzung zweier Vektoren oder je zweier entsprechender

Vektorkomponenten bestehen, denn diese lassen sich immer in die Form (92) bzw. (90) bringen.

Wir können nun durch Differentiation von Skalaren oder von Vektorkomponenten zu neuen Gebilden gelangen.

φ sei ein Skalar. Als Gradient von φ bezeichnen wir einen Vektor von der Form:

(93) $$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathfrak{k};$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sind also Komponenten eines Vektors, dessen Bedeutung wir am besten auf folgende Weise erläutern.

Wir denken uns ein skalares Feld im Raum (z. B. ein Temperaturfeld); φ ist von Ort zu Ort verschieden, die Werte bestehen jedoch unabhängig vom Koordinatensystem. Es ist also:

(94) $$\varphi = f(x, y, z) = f'(x', y', z')$$

eine Invariante; die ungestrichenen und gestrichenen Komponenten stellen identische Punkte in verschiedenen Systemen dar.

Gehen wir von einem Punkt zu irgendeinem benachbarten, so ändert sich φ, und zwar in verschiedener Weise je nach der Richtung, in der wir fortschreiten. Für eine Richtung ist die Änderung die rascheste. Wir denken uns die Flächen $\varphi = f(x, y, z) = \text{const.}$, die Niveauflächen, konstruiert. Dann steht die Richtung schnellster Änderung auf der durch den Punkt x, y, z gehenden Niveaufläche senkrecht; die Richtungskosinus der auf der Fläche $\varphi = \text{const.}$ senkrecht stehenden Geraden sind, wie die analytische Geometrie zeigt, gegeben durch:

(95) $$\begin{aligned} \cos(nx) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(ny) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(nz) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Die Größe der raschesten Änderung, bezogen auf die unendlich kleine Längeneinheit, ist der Betrag von $\frac{d\varphi}{dn}$ für die eben definierte Richtung. Also:

$$(96)\qquad \begin{aligned}\frac{d\varphi}{dn} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dn} \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(nz) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.\end{aligned}$$

Fassen wir die größte Änderung von φ an irgendeiner Stelle, bezogen auf die Längeneinheit, als Vektor auf, dessen Richtung durch (95) und dessen absoluter Betrag durch (96) gegeben ist, so sind seine Vektorkomponenten die Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Unser Vektor der größten Änderung des Skalars φ ist also gerade der durch (93) definierte Gradient. Diese Definition gilt zunächst für jedes Cartesische Koordinatensystem. Wir werden später (§ 7) sehen, daß die Gültigkeit der Definition „grad" noch weiter reicht. Wir können die Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{\partial x}$ usw. auch symbolisch als Produkte des Skalars φ mit den Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ auffassen und letztere als Vektorkomponenten deuten.

Bilden wir das Differential:

$$(97)\qquad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

so läßt sich dieses als skalares Produkt der beiden Vektoren grad φ und $(dx \cdot \mathfrak{i} + dy \cdot \mathfrak{j} + dz \cdot \mathfrak{k})$ ansehen. Der Betrag der Änderung eines Skalars φ beim Fortschreiten in irgendeiner Richtung ist also wieder ein Skalar.

Wir kommen zu einem zweiten Ausdruck. $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \mathfrak{a}_z$ seien die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ in irgendeinem Cartesischen Koordinatensystem. Dann ist:

$$(98)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{\partial\mathfrak{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{a}_z}{\partial z}$$

ein Skalar; wir bezeichnen ihn als die Divergenz von $\mathfrak{a}$.

Auch sie läßt eine einfache Deutung zu. Ist S ein Volumen, σ seine Oberfläche, so ist[1]):

$$(99)\quad \int\limits_S \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} dS = \int\limits_S \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} dx\,dy\,dz = \int\limits_\sigma \mathfrak{a}_x\,dy\,dz = -\int\limits_\sigma \mathfrak{a}_x \cos(nx)\,d\sigma.$$

Hierbei ist die Integration über das ganze Volumen bzw. die ganze Oberfläche auszudehnen; der Winkel (nx) ist der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der inneren Flächennormalen von $d\sigma$. Entsprechende Beziehungen gelten für $\mathfrak{a}_y$ und $\mathfrak{a}_z$. Also erhält man:

$$(100)\quad \int\limits_S \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial z}\right) dS = -\int\limits_\sigma \Big(\mathfrak{a}_x \cos(nx) + \mathfrak{a}_y \cos(ny) + \mathfrak{a}_z \cos(nz)\Big) d\sigma$$

$$= -\int\limits_\sigma \mathfrak{a}_n\,d\sigma,$$

oder:

$$(101)\qquad \int\limits_S \operatorname{div} \mathfrak{a}\,dS = -\int\limits_\sigma \mathfrak{a}_n\,d\sigma.$$

$\mathfrak{a}_n$ ist die Komponente des Vektors $\mathfrak{a}$ an der Stelle $d\sigma$ der Oberfläche bezogen auf die Richtung der inneren Normalen von $d\sigma$. Gleichung (101) gibt die Verwandlung eines Raumintegrals in ein Flächenintegral; wir bezeichnen sie als Gaußschen Integralsatz.

Zugleich gibt sie folgende Deutung der Divergenz. $\mathfrak{a}_n$ möge eine in der Richtung der Normalen in der Zeiteinheit durch die Einheit der Oberfläche strömende Flüssigkeitsmenge darstellen. Das Flächenintegral von (101) bedeutet dann die ganze aus der Oberfläche von S ausströmende Menge. div $\mathfrak{a}$ ist also die aus der unendlich kleinen Volumeneinheit in der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsmenge. Wir können auch schreiben:

$$(102)\qquad \operatorname{div} \mathfrak{a} = -\lim_{dS=0} \int\limits_\sigma \frac{\mathfrak{a}_n\,d\sigma}{dS}.$$

div $\mathfrak{a}$ ist das Oberflächenintegral über die unendlich klein gedachte Volumeneinheit.

Da das Oberflächenintegral von jedem Koordinatensystem unabhängig ist, so gilt (101) und (102) für jedes beliebige System.

[1]) Vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905, S. 29.

Wir führen schließlich noch eine dritte Größe ein. Sind $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ wieder die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ in einem Cartesischen System, so wird ein neuer Vektor, die Rotation von $\mathfrak{a}$ in demselben System definiert durch:

$$(103)\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{a} = \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{a}_x & \mathfrak{a}_y & \mathfrak{a}_z \end{vmatrix}.$$

Die Rotation von $\mathfrak{a}$ ist also ein axialer Vektor. Wir können der Rotation bzw. der Komponente derselben nach einer beliebigen Richtung n mit Hilfe des Stokesschen Satzes:

$$(104)\qquad \int_s \mathfrak{a}\,d\mathfrak{s} = \int_\sigma \operatorname{rot}_n \mathfrak{a}\,d\sigma,$$

wo das erste Integral über die das Flächenstück σ umschließende Kurve s zu nehmen ist, wieder eine vom Koordinatensystem unabhängige Definition geben:

$$(105)\qquad \operatorname{rot}_n \mathfrak{a} = \lim_{d\sigma=0} \int_s \frac{\mathfrak{a}\,d\mathfrak{s}}{d\sigma}.$$

Aus den vorstehend gegebenen Definitionsgleichungen (93), (98) und (103) für Gradient, Divergenz und Rotation sind durch eine einfache Rechnung folgende Beziehungen herzuleiten:

$$(106)\qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = 0$$

$$(107)\qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$$

$$(108)\qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$$

$$(109)\qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a} - \Delta\mathfrak{a}.$$

Hierbei ist: $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, sowie $\Delta\mathfrak{a}$ ein Vektor mit den Komponenten $\Delta\mathfrak{a}_x = \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{a}_x}{\partial z^2}$ und entsprechenden $\Delta\mathfrak{a}_y$ und $\Delta\mathfrak{a}_z$.

Wir wollen nunmehr die Gleichungen der Elektrodynamik und zwar diejenigen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz anschreiben. Sie sollen uns ein Beispiel für die Verwendung der

Vektoranalysis in der theoretischen Physik geben und zugleich die Grundlage für den Nachweis liefern, daß die Theorie der Elektrizität mit dem speziellen Relativitätsprinzip in Übereinstimmung steht. Wir werden zeigen, daß die hingeschriebenen Gleichungen in bezug auf die Lorentz-Transformation invariant sind.

Die Feldgleichungen der Elektronentheorie lauten:

$$\text{(110)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

$$\text{(111)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{q}\right)$$

$$\text{(112)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho$$

$$\text{(113)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage der mathematischen Beschreibung aller elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum, zum Teil freilich nur unter Heranziehung von Hilfshypothesen. Die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bedeuten nach Größe und Richtung die elektrische und magnetische Feldstärke, d. h. die Kraft, die an irgendeiner Raumstelle auf die elektrische bzw. magnetische Menge 1 wirkt.

Gleichung (110), die ebenso wie (111) die Zusammenfassung je dreier Komponentengleichungen darstellt[1]), gibt eine Differentialbeziehung für die durch eine zeitliche Änderung der magnetischen Feldstärke an derselben Stelle hervorgerufene elektrische Feldstärke.

Die Gleichung (111) liefert umgekehrt die magnetische Feldstärke als Funktion der zeitlichen Änderung von $\mathfrak{E}$. Zugleich bestimmt sie den infolge der Bewegung von Elektrizität (d. h. der Elektronen) entstehenden Teil der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ als Funktion der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ konvektiv bewegten Elektrizität von der Dichte ϱ. $\varrho \mathfrak{q}$ bezieht sich auf die Zeiteinheit, ebenso auch die das elektromagnetische Feld darstellenden Größen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Dabei deuten wir diese Größen als Kraftfluß, d. h. fassen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ als die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömende elektrische bzw. magnetische Kraft auf. Die Gleichung (112) gibt den Zusammenhang zwischen der in der Zeiteinheit aus der Volumeneinheit austretenden elektrischen Feldstärke (die wir uns

[1]) Die Gleichungen (110) bis (113) sind in § 8 ausführlich geschrieben.

uch durch die in der Volumeneinheit entspringenden Anzahl von ;raftlinien veranschaulichen können) und der an derselben Stelle ich befindenden Elektrizität von der Dichte ϱ. div $\mathfrak{E} = 0$ sagt us, daß an einer von Elektrizität freien Stelle die in die unendich kleine Volumeneinheit eintretende Feldstärke gleich der ausretenden ist.

Analog ist Gleichung (113) dahin zu deuten, daß freier Magneismus überhaupt nicht vorkommt, sondern $\mathfrak{H}$ immer nur infolge ler durch die Gleichung (111) beschriebenen Vorgänge auftritt. Zu den Feldgleichungen (110) bis (113) tritt noch die Grundgleichung:

$$\mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right), \tag{114}$$

sowie die beiden Gleichungen:

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2), \tag{115}$$

$$\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \tag{116}$$

hinzu. Die Größe $\mathfrak{F}$ stellt die elektromagnetische Kraftdichte, W die Dichte der elektromagnetischen Energie dar; $\mathfrak{S}$, der Poyntingsche Vektor, die Dichte der Energieströmung. $\mathfrak{F}$ bezieht sich auf Volumen- und Zeiteinheit, W auf die Volumeneinheit, $\mathfrak{S}$ schließlich auf Flächen- und Zeiteinheit und zwar in einem „ruhenden" System.

Die Gleichung (114) für die Dichte $\mathfrak{F}$ der ponderomotorischen Kraft ist eine Kombination des Coulombschen Gesetzes ($\mathfrak{F} = \varrho\mathfrak{E}$) und desjenigen von Biot-Savart $\left(\mathfrak{F} = \frac{\varrho}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right)$. Die Bedeutung von (115) wird später (§ 8) deutlicher hervortreten. Zu (116) ist zu bemerken, daß $\mathfrak{S}_n d\sigma$ die elektromagnetische Energie darstellt, die in der Zeiteinheit durch das Flächenelement $d\sigma$ strömt.

Neben den Vektoren treten in der Physik ihnen analoge Zustandsgrößen auf, die wir als Tensoren bezeichnen. Jeder Tensor ist durch neun Komponenten festgelegt. Hat ein Tensor von Punkt zu Punkt bestimmt gegebene Werte, so bezeichnet man die Gesamtheit als Tensorfeld.

Solche Zustandsgrößen bzw. ihre Komponenten nehmen je nach der Wahl des Koordinatensystems wechselnde Werte an, die durch

näher zu definierende Transformationsgleichungen ineinander übergehen. Analytisch behalten sie aber, ebenso wie die Vektorkomponenten, ihre Form für jedes (Cartesische) Koordinatensystem. Bei einem Tensorfeld sind die Tensoren Funktionen der Koordinaten, die unabhängig vom besonderen System bestehen.

Wir betrachten zuerst als **Beispiel eines Tensors** die auf ein unendlich kleines Volumen eines elastischen Körpers wirkende **elastische Druckkraft** oder **Spannung**[1]; diese besteht, ebenso wie der Kraftvektor, unabhängig vom Koordinatensystem. Die auf die unendlich kleine Volumeneinheit wirkende Kraft läßt sich in die Form bringen:

$$
(117)\qquad
\begin{aligned}
K_x &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
K_y &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
K_z &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Hierbei sind die Größen X_x, X_y usw. die neun Komponenten des die Spannung festlegenden **elastischen Spannungstensors**. Sie lassen sich als Druck- und Schubkräfte, die an den **Begrenzungsflächen** der Volumeneinheit wirksam sind, deuten und z. B. in die Form bringen:

$$
(118)\qquad
\begin{aligned}
X_x &= -2K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\
Y_y &= -2K\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\
Z_z &= -2K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\right) \\
Y_z &= Z_y = -K\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \\
Z_x &= X_z = -K\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\
X_y &= Y_x = -K\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right);
\end{aligned}
$$

[1] Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. 11. Vorlesung oder H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. 2. Bd. § 23 und 24.

ξ, η, ζ sind die unendlich klein angenommenen Verrückungen des Punktes x, y, z, auf den die elastische Druckkraft wirkt, K und Θ sind Konstante, die von der Natur des Körpers abhängen. „Wie aus den Ableitungen dieser Gleichungen hervorgeht, gelten sie ungeändert für jedes Koordinatensystem" (Kirchhoff).

Wir definieren nun den Tensor allgemein entsprechend der S. 55 gegebenen Vektordefinition.

Haben neun Größen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{xx} & \mathfrak{a}_{xy} & \mathfrak{a}_{xz} \\ \mathfrak{a}_{yx} & \mathfrak{a}_{yy} & \mathfrak{a}_{yz} \\ \mathfrak{a}_{zx} & \mathfrak{a}_{zy} & \mathfrak{a}_{zz} \end{matrix} \tag{119}$$

die Eigenschaft, daß der Ausdruck:

$$\sum_{i,k} \mathfrak{a}_{ik}\, \mathfrak{a}_i\, \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_{xx}\, \mathfrak{a}_x\, \mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_{xy}\, \mathfrak{a}_x\, \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_{xz}\, \mathfrak{a}_x\, \mathfrak{b}_z + \cdots \tag{120}$$

in bezug auf jede beliebige Drehung des Cartesischen Koordinatensystems eine Invariante ist, wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ willkürlich zu wählende Vektoren sind, dann nennen wir (119) einen Tensor; die einzelnen Komponenten Tensorkomponenten. Diese transformieren sich nach Gleichungen, die aus der Invarianz von (120) hervorgehen[1]).

Fassen wir in (120) die Glieder mit $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$ zusammen, so können wir den Tensor auch dadurch definieren, daß seine Komponenten mit den Vektorkomponenten von $\mathfrak{a}$ zu den drei Größen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{xx}\, \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yx}\, \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zx}\, \mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_x \\ \mathfrak{a}_{xy}\, \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yy}\, \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zy}\, \mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_y \\ \mathfrak{a}_{xz}\, \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{yz}\, \mathfrak{a}_y + \mathfrak{a}_{zz}\, \mathfrak{a}_z &= \mathfrak{t}_z \end{aligned} \tag{121}$$

zusammengefaßt, diese zu Komponenten eines neuen Vektors machen sollen. Man beachte bei dieser Definition die Analogie von (121) mit (117).

Daß die als Tensoren definierten Zustandsgrößen in jedem System dieselbe analytische Form besitzen, geht aus folgender Überlegung hervor.

[1]) Wir werden in § 7 die Herleitung der Transformationsgleichungen in größerem Zusammenhang kennen lernen.

Setzt man für die Tensorkomponenten die Werte:

$$(122) \qquad \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{c}_i \mathfrak{b}_k, \qquad (i, k = x, y, z)$$

wobei $\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{b}_k$ Vektorkomponenten sind, so erhält man einen Tensor spezieller Art. Von dem Tensorcharakter der Größen (122) überzeugt man sich durch Einsetzen in (121). Man erhält z. B. für die erste Gleichung:

$$(123) \qquad \mathfrak{b}_x (\mathfrak{a}_x \mathfrak{c}_x + \mathfrak{a}_y \mathfrak{c}_y + \mathfrak{a}_z \mathfrak{c}_z) = \mathfrak{t}_x;$$

die Klammer ist eine Invariante.

Sind neun beliebige Größen $\mathfrak{a}_{ik}$ gegeben, welche die Bedingungen (121) erfüllen, so kann man sie im allgemeinen nicht in der Form (122) darstellen.

Wohl aber läßt sich jeder Tensor in folgender Weise auf eine Reihe von Vektorkomponenten zurückführen. Man kann in jedem Koordinatensystem setzen:

$$(124) \qquad \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_i^{(1)} \mathfrak{b}_k^{(1)} + \mathfrak{a}_i^{(2)} \mathfrak{b}_k^{(2)} + \mathfrak{a}_i^{(3)} \mathfrak{b}_k^{(3)},$$

wo $\mathfrak{a}_i^{(1)}$, $\mathfrak{b}_k^{(1)}$ usw. die Komponenten von drei Paaren von Vektoren sind; hierbei erfüllt (124) mit Rücksicht auf (122) die Gleichungen (121). Nun können die drei Vektoren $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, $\mathfrak{b}^{(3)}$ willkürlich gewählt werden, die neun Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}^{(1)}$, $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{a}^{(3)}$ sind durch die neun Gleichungen (124) eindeutig bestimmt. Die Tensorkomponenten transformieren sich wie die rechten Seiten von (124). Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn man die aus (11) sich ergebende Eigenschaft der Vektoren beachtet, daß die Tensorkomponenten in jedem System dieselben analytischen Ausdrücke sind.

Man nennt einen Tensor symmetrisch, wenn:

$$(125) \qquad \mathfrak{a}_{xy} = \mathfrak{a}_{yx}, \qquad \mathfrak{a}_{xz} = \mathfrak{a}_{zx}, \qquad \mathfrak{a}_{yz} = \mathfrak{a}_{zy},$$

antisymmetrisch (oder unsymmetrisch), wenn:

$$(126) \qquad \mathfrak{a}_{xy} = -\mathfrak{a}_{yx}, \qquad \mathfrak{a}_{xz} = -\mathfrak{a}_{zx}, \qquad \mathfrak{a}_{yz} = -\mathfrak{a}_{zy},$$
$$\mathfrak{a}_{xx} = 0, \qquad \mathfrak{a}_{yy} = 0, \qquad \mathfrak{a}_{zz} = 0.$$

Sind sämtliche Komponenten eines Tensors in einem Koordinatensystem null, so folgt sowohl aus (124) als auch aus den Definitionsgleichungen (120) oder (121), daß die Gesamtheit der Tensorkomponenten in jedem Cartesischen System null ist, das aus dem einen durch Drehung hervorgeht.

Wir finden demnach in Analogie mit S. 55:

Wird ein Naturgesetz durch Nullsetzen sämtlicher Komponenten eines Tensors dargestellt, so ist es — da die Komponenten ihre analytische Form in jedem System behalten — in bezug auf jede beliebige Drehung des Cartesischen Systems invariant.

Ein symmetrischer Tensor findet nun in der Elektrodynamik und zwar bereits in der älteren Maxwellschen Theorie Verwendung.

Man kann die auf die unendlich kleine Einheit des Volumens wirkende ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes ersetzen durch Kräfte, die an seiner Oberfläche angreifen. Diese sind analog den schon als Beispiel für Tensoren erwähnten Kräften der elastischen Spannung gebildet; man nennt sie deshalb auch Kräfte der Maxwellschen Spannung[1]). Die Komponenten der auf die Volumeneinheit sich beziehenden ponderomotorischen Kraft $\mathfrak{P}$ sind entsprechend den Formeln (117) der elastischen Spannung (S. 62):

$$(127)\qquad \begin{aligned} -\mathfrak{P}_x &= \frac{\partial \mathfrak{s}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{xz}}{\partial z} \\ -\mathfrak{P}_y &= \frac{\partial \mathfrak{s}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{yz}}{\partial z} \\ -\mathfrak{P}_z &= \frac{\partial \mathfrak{s}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die drei Komponenten von (127) entsprechen völlig den Vektorkomponenten (121). Die Größen $\mathfrak{s}_{xx}$, $\mathfrak{s}_{xy}$ usw. stellen die Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors bezogen auf die Volumeneinheit dar. Sie sind analog mit den an der Oberflächeneinheit angreifenden Druck- und Schubkräften der Elastizitätstheorie, wobei hier die jeweilige Flächennormale nach innen positiv angenommen ist. Der Vektor $\mathfrak{P}$ entspricht nicht ganz der Kraftdichte $\mathfrak{F}$ der Elektronentheorie [vgl. (114)]. Hierauf wird noch später (§ 8) einzugehen sein.

Die rechten Seiten von (127) sind symbolisch als Divergenzen aufzufassen; $\mathfrak{P}$ also als ein Vektor, dessen Komponenten die Form von Divergenzen besitzen. Wir führen deshalb für $\mathfrak{P}$ das Symbol ein:

$$(128)\qquad \mathfrak{P} = -\,\mathrm{div}\,\mathfrak{s}\,.$$

[1]) Für die Maxwellsche Spannung vgl. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität. Bd. I.

Die Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors können wir in folgender Weise auf die Komponenten des elektromagnetischen Feldes zurückführen; es ist:

$$(129) \quad \begin{aligned} s_{xx} &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{H}_x^2 \\ s_{xy} &= -(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und analoge Gleichungen für die übrigen Komponenten. Die Gleichungen (129) gelten für jedes Koordinatensystem.

Es lassen sich nun sämtliche hier für drei Dimensionen entwickelten Sätze sofort auf vier Dimensionen übertragen, und diese erweiterte Vektorenrechnung ließe sich in der speziellen Relativitätstheorie verwenden, wenn man ein Koordinatensystem mit vier aufeinander senkrecht stehenden reellen Achsen zugrunde legen würde. Die Invarianz des skalaren Produktes zweier vierdimensionaler Vektoren — analog der Gleichung (87) — ist jedoch an lineare orthogonale Transformationsgleichungen gebunden. Die allgemeine Lorentz-Transformation in der von uns gewählten Form (44) und (45) ist zwar linear, aber nicht orthogonal (vgl. S. 29). Hierdurch wird eine Erweiterung der Vektoranalysis notwendig, zu der wir uns jetzt wenden wollen.

§ 7. Allgemeine Tensoranalysis (I. Teil).

Wir gehen zur Begründung der allgemeinen Tensoranalysis noch einmal auf unsere Definition des skalaren Produktes S. 53 zurück. Wir hatten als Beispiel aus der Physik den Satz: „Arbeit = Kraft mal Weg" gewählt.

Der „Weg", den wir uns als gerade Strecke, als Verschiebung, dachten, ist ein Vektor, d. h. eine Größe, deren Komponenten sich ebenso transformieren wie die Koordinaten. Die „Kraft" ist durch eine gerichtete Strecke darstellbar; sie wurde ebenfalls als Vektor in dem angegebenen Sinn aufgefaßt. Die „Arbeit" ist ein Skalar; ihr Wert bleibt unabhängig von jedem Koordinatensystem derselbe. Legten wir für die Darstellung unserer Vektoren Cartesische Koordinatensysteme zugrunde, die durch Drehung ineinander übergingen, so galt der Satz von der Invarianz des skalaren Produktes $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z$.

Nun ist aber der invariante Begriff Arbeit sicherlich nicht

an die Cartesischen Koordinatensysteme gebunden; er bleibt für Koordinatensysteme allgemeinerer Art bestehen. Wir wollen nun im folgenden Gruppen von Koordinatensystemen zugrunde legen, für welche die endlichen Koordinaten analytisch durch lineare Transformationen auseinander hervorgehen. Zwischen den Koeffizienten der Transformationsgleichungen sollen im allgemeinen keinerlei Bedingungen, vor allem jedoch keine Orthogonalitätsbedingungen bestehen. Die Achsen solcher Koordinatensysteme sind geradlinig und schneiden sich unter beliebigen Winkeln. Die Maßeinheiten auf den einzelnen Achsen bestehen unabhängig voneinander; wir messen also auf jeder Achse mit einem anderen, durch die Transformationsgleichungen festgelegten Maßstab. Wir bezeichnen solche Koordinatensysteme als affine.

Zu der angegebenen Art von Transformationen gehört die Lorentz-Transformation (44) und (45) für ein vierdimensionales Kontinuum als spezieller Fall. Zwar sind Bedingungsgleichungen vorhanden, wir haben es nicht mit allgemeinen affinen Systemen zu tun, aber diese sind nicht die Bedingungen der Orthogonalität. Daß sich die Lorentz-Transformation auf affine Systeme besonderer Art im Euklidischen Kontinuum bezieht, geht aus der geometrischen Darstellung S. 35 hervor.

Den Begriff „Verschiebung" können wir nun auf affine Systeme übertragen. Die Komponenten der Verschiebung sind identisch mit den Koordinaten von Punkten im affinen Koordinatensystem; sie transformieren sich also wieder wie die Koordinaten. Ebenso läßt sich die Kraft in demselben System in Komponenten zerlegen. Sind die Komponenten der Kraft in irgendeinem affinen System k_α, k_β, k_γ, die der Verschiebung v_α, v_β, v_γ, so ist die Gesamtarbeit jedenfalls $k_\alpha v_\alpha + k_\beta v_\beta + k_\gamma v_\gamma$. Diese soll invariant sein. Das ist nur dann möglich, wenn für die Kraft nicht dieselben Transformationsgleichungen gelten, wie für die Verschiebung. Wir müssen die Kraft als eine andere Art von Vektor auffassen, für welchen neue Transformationsgleichungen aufzustellen sind.

Wir betrachten die Aufgabe sogleich allgemeiner. Mit Rücksicht auf unser Raum-Zeit-Kontinuum gehen wir zu vier Dimensionen über. Wir wählen ein beliebiges affines Koordinatensystem. Wir legen zwei Arten von Vektoren (im vierdimensionalen

Kontinuum auch als Vierervektoren bezeichnet) zugrunde. Die einen, die dem „Weg" entsprechen, nennen wir kontravariante Vektoren; ihre Komponenten seien a^1, a^2, a^3, a^4. Die der Kraft analogen Vektoren bezeichnen wir als kovariant, die Komponenten mit b_1, b_2, b_3, b_4. Bei den kontravarianten Vektoren wählen wir also den oberen[1]), bei den kovarianten den unteren Index.

Die Berechtigung der Einführung dieser beiden Arten von Vektoren und ihrer Erweiterung zu Tensoren wird sich dadurch ergeben, daß die Gleichungen der Physik, wie wir an den Gleichungen der Elektrodynamik sehen werden, durch sie besonders einfach und übersichtlich erscheinen. Vor allem erledigen sich alle Invarianzuntersuchungen von selbst.

Beide Arten von Vektoren sind wieder durch gerichtete Strecken darstellbar, die unabhängig vom Koordinatensystem existieren. Der analytische Ausdruck der Vektorkomponenten besteht also für jedes affine Koordinatensystem (vgl. S. 11). Das letztere gilt, wie sich noch ergibt, auch für die Komponenten der Tensoren, die wir bereits S. 63 für dreidimensionale rechtwinklige Koordinatensysteme definiert haben, und die in erweiterter Form zu übernehmen sind.

Es wird sich nun zeigen, daß Vektor- und Tensorkomponenten jeder Art beim Übergang aus einem affinen Koordinatensystem in ein anderes sich durch lineare homogene Gleichungen ineinander transformieren. Sind also sämtliche Komponenten eines Vektors oder Tensors beliebiger Art in einem System null, so sind sie es in jedem.

Entsprechend den Ausführungen S. 55 und 65 finden wir also: Sind Naturgesetze durch Nullsetzen aller Komponenten irgendeines Vektors oder Tensors dargestellt, so sind sie für alle affinen Koordinatensysteme — und hierzu gehören die Systeme der Lorentz-Transformation — invariant.

Wir gehen jetzt zur Herleitung der Transformationsgleichungen über. Nur die kontravarianten Vektoren sind wirkliche Verschiebungen, die sich wie die Koordinaten transformieren. Für sie allein gelten also (vgl. S. 54) die Gleichungen:

[1]) Im allgemeinen wird zwischen oberem Index und Exponent eine Verwechselung nicht möglich sein. In besonderen Fällen ist die zu potenzierende Größe in Klammern zu setzen.

$$
(130)\quad
\begin{aligned}
a^{1'} &= \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} a^4 \\
a^{2'} &= \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_4} a^4 \\
a^{3'} &= \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_4} a^4 \\
a^{4'} &= \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} a^1 + \frac{\partial x'_4}{\partial x_2} a^2 + \frac{\partial x'_4}{\partial x_3} a^3 + \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} a^4.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten $\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}$ usw. sind **räumlich und zeitlich konstant; sie unterliegen den Orthogonalitätsbedingungen nicht.**

Man kann (130) zusammenfassen in:

$$(131)\qquad a^{i'} = \sum_k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} a^k = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} a^k \qquad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Wir haben bei dem zweiten Ausdruck von (131) das Summenzeichen weggelassen und wollen dies in Zukunft immer tun, wobei wir ein für allemal die Festsetzung treffen:

Wenn in einem Term eines Ausdruckes derselbe Index zweimal auftritt, das eine Mal als oberer, das andere Mal als unterer Index, so ist stets über ihn zu summieren (und zwar in unserem vierdimensionalen Kontinuum für alle Werte von 1 bis 4), wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist.

Es ist noch zu beachten, daß auch die Koordinaten oder deren Inkremente **Komponenten von kontravarianten Vektoren** sind; wir schreiben aber bei diesen die Indizes ausnahmsweise als untere, behalten also die Bezeichnung $x_1, x_2 \ldots, dx_1, dx_2 \ldots$ bei.

Es gelten also **für die Koordinaten** selbst **die Transformationsgleichungen:**

$$(132)\qquad x'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} x_k;$$

analoge Gleichungen bestehen für die **Differentiale:**

$$(133)\qquad dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Nun verlangen wir entsprechend den Bedingungen S. 54, daß:

$$(134)\quad a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + a^4 b_4 = a^{1'} b'_1 + a^{2'} b'_2 + a^{3'} b'_3 + a^{4'} b'_4$$

oder:

(135) $$a^k b_k = \text{Invariante}$$

für alle Koordinatensysteme sei, die durch (132) ineinander übergehen.

Daraus ergibt sich das Transformationsgesetz für den kovarianten Vektor. Die Umkehrung von (131) führt zunächst zu:

(136) $$a^k = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a^{i'}.$$

Also ist:

(137) $$a^{i'} b'_i = a^k b_k = b_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a^{i'},$$

und als Transformationsgesetz beim Übergang vom ungestrichenen Koordinatensystem zum gestrichenen folgt[1]):

(138) $$b'_i = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} b_k.$$

Die $\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}$ sind auch hier konstante Größen. Orthogonalitätsbedingungen bestehen natürlich wieder nicht.

Wir können nun kontravariante Vektoren als solche definieren, die sich nach (131), kovariante als solche, die sich nach (138) transformieren.

Da die allgemeine Lorentz-Transformation in der Form (44) eine lineare, aber keine orthogonale Transformation im Sinne von (88) und (89) ist, so müssen wir schon in der speziellen Relativitätstheorie zwischen kontravarianten und kovarianten Vektoren unterscheiden; die Beziehung zwischen beiden wird infolge der Zusatzbedingungen (45) eine sehr einfache werden. Wir gehen jedoch vorerst nicht darauf ein (vgl. S. 78).

Wir wollen auch den Begriff des Tensors, den wir S. 63 aufgestellt hatten, auf ein affines Koordinatensystem erweitern. Wir definieren zunächst Tensoren II. Ranges (oder zweiter Stufe).

---

[1]) Es ist zu beachten, daß:

$$b_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a^{i'} = \sum_{i,k} b_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} a^{i'} = \sum_i a^{i'} \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} b_k$$

und die a'_i beliebig wählbare Vektorkomponenten sind.

Wir bezeichnen einen Tensor II. Ranges als **kontravariant**, wenn seine sämtlichen 16 Komponenten a^{ik} (also $a^{11}, a^{12}, \ldots . a^{44}$) die **Bedingung** erfüllen[1]):

(139) $$a^{ik} c_i d_k = \text{Invariante}$$

für alle affinen Koordinatensysteme, wobei also c_i und d_k Vektoren sind, die sich nach (138) transformieren.

Die 16 Produkte der Vektorkomponenten a^i und b^k erfüllen ohne weiteres die Bedingung (139), so daß also $a^i b^k$ einen kontravarianten Tensor II. Ranges darstellt. Es ist aber nicht die allgemeinste Form. Vielmehr lassen sich 16 beliebige solche Tensorkomponenten stets als Summe der $a^i b^k$ von vier geeignet gewählten Paaren von kontravarianten Vektoren analog (124) darstellen. Es ist also:

(140) $$a^{ik} = a^i_{(1)} b^k_{(1)} + a^i_{(2)} b^k_{(2)} + a^i_{(3)} b^k_{(3)} + a^i_{(4)} b^k_{(4)}.$$

Der Beweis entspricht völlig dem S. 64 gegebenen.

Die Komponenten a_{ik} eines **kovarianten** Tensors II. Ranges sind definiert zufolge:

(141) $$a_{ik} c^i d^k = \text{Invariante.}$$

Schließlich stellen wir noch einen **gemischten** Tensor II. Ranges a_i^k auf, für welchen:

(142) $$a_i^k c^i d_k = \text{Invariante}$$

ist.

Die kovarianten Tensorkomponenten lassen sich auf die Summe der $a_i b_k$, die gemischten Tensorkomponenten auf die Summe der $a_i b^k$ von vier entsprechend gewählten Paaren von Vektoren zurückführen. Hierdurch ist ebenso wie S. 64 der Beweis erbracht, daß die analytische Form der Tensorkomponenten **unabhängig** vom besonderen Koordinatensystem besteht.

Die letztere für alle drei Arten von Tensoren II. Ranges bestehende Eigenschaft führt unmittelbar zu den **Transformationsgleichungen**, welche die Werte der Tensorkomponenten aus dem ungestrichenen System in das gestrichene überführen. Diese sind dieselben wie die für die entsprechenden Produkte der Vektorkomponenten geltenden.

[1]) Hierbei ist, wie stets, über die i und k zu summieren.

Sie lauten für den kontravarianten Tensor II. Ranges:

(143) $$a^{lm'} = \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} a^{ik};$$

für den kovarianten Tensor:

(144) $$a'_{lm} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} a_{ik};$$

und für den gemischten Tensor:

(145) $$a_l^{m'} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} a_i^k.$$

Diese selben Transformationsgleichungen hätte man ebenso aus den Definitionsgleichungen (139), (141) und (142) herleiten können. Das Verfahren hätte dem der Ableitung der Transformationsgleichungen (138) aus (136) und (135) entsprochen.

Man kann die Transformationsgleichungen (143), (144) und (145) wiederum zur Definition der kontravarianten, kovarianten und gemischten Tensoren II. Ranges benutzen.

Den Definitionsgleichungen (139), (141) und (142) entsprechend lassen sich auch Tensoren III. und höheren Ranges bilden. So ist z. B. durch:

(146) $$a_{ik}^l a^i b^k c_l = \text{Invariante}$$

für alle affinen Koordinatensysteme ein gemischter Tensor III. Ranges mit den Koeffizienten a_{ik}^l festgelegt. Die Transformationsgleichungen sind in analoger Weise zu erweitern. Tensoren beliebigen Ranges kann man analog (140) auf Vektoren zurückführen, womit auch für sie erwiesen ist, daß ihre analytische Form für jedes unserer Koordinatensysteme unverändert besteht. Der Vektor ist sinngemäß als Tensor I. Ranges, der Skalar als kontravarianter oder kovarianter Tensor nullten Ranges zu bezeichnen. Sind Vektoren oder Tensoren von Punkt zu Punkt gegeben, so bezeichnet man deren Gesamtheit wiederum als Vektor- oder Tensorfeld. Die Komponenten sind Funktionen der Koordinaten, die für jedes System gelten.

Tensoren II. oder höheren Ranges nennt man symmetrisch, wenn zwei Komponenten, die durch Vertauschung zweier Indices auseinander hervorgehen, gleich sind, antisymmetrisch (oder unsymmetrisch), wenn sie entgegengesetzt gleich sind (vgl. S. 64). Diese Eigenschaften bestehen unabhängig vom Bezugssystem.

Wir beweisen als **Beispiel**, daß $a^{ik} = a^{ki}$ eine für jedes **Koordinatensystem** bestehende Eigenschaft eines Tensors ist.

Es ist:

(147) $$a^{lm'} = \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} a^{ik} = \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} a^{ki}.$$

Da über alle $i, k = 1, 2, 3, 4$ zu summieren ist, so kann man bei der doppelten Summation die Buchstaben i und k vertauschen, ohne daß der Ausdruck geändert wird. Man erhält also:

(148) $$a^{lm'} = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} a^{ik} = a^{ml'}.$$

Ein besonders einfacher gemischter Tensor II. Ranges ist noch hervorzuheben. Vergleicht man (135) und (142), so folgt, daß die Werte:

(149) $$\begin{aligned} \delta^i_k &= 1 \qquad (i = k) \\ \delta^i_k &= 0 \qquad (i \neq k) \end{aligned}$$

die Komponenten eines Tensors II. Ranges darstellen.

Bei allen unseren Definitionen wurde nun bisher angenommen, daß die x_i affine Koordinaten in einem vierdimensionalen Euklidischen Kontinuum sind. Für diese allein gelten die sämtlichen aufgestellten linearen Transformationsgleichungen mit **konstanten** Koeffizienten.

Nun gibt es aber noch Koordinatensysteme beliebiger anderer Art, die man sämtlich unter dem Begriff der Systeme **krummliniger Koordinaten oder Parameter** zusammenfaßt. So sind z. B. sphärische oder Zylinderkoordinaten besondere Arten von Parametern, die man von drei auf vier Dimensionen erweitern kann.

Cartesische oder affine Koordinaten, sphärische oder Zylinderkoordinaten im Raum haben alle eine Eigenschaft gemeinsam: zur Festlegung eines Raumpunktes sind **drei** Zahlenangaben notwendig, sobald das Koordinatensystem definiert ist. Will man gar keine Voraussetzung über die Art der Koordinatendarstellung machen, so kann man allgemein sagen, die Lage eines Raumpunktes ist durch die Angabe von drei Parametern bestimmt[1]).

---

[1]) Wir lassen vorerst die Frage ganz offen, ob wir es mit einem Euklidischen oder Nichteuklidischen Kontinuum zu tun haben (vgl. II. Teil § 11).

Entsprechend ist im vierdimensionalen Kontinuum ein Weltpunkt durch vier Parameter, die wir wieder mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen wollen, festgelegt. Sämtliche Weltpunkte bilden eine vierdimensionale **Mannigfaltigkeit**. Ein Punkt, der in einem beliebigen Koordinatensystem durch vier Parameter x_1, x_2, x_3, x_4 bestimmt ist, wird in einem anderen System durch vier Werte x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 festgelegt sein. Zwischen den gestrichenen und ungestrichenen Parametern bestehen aber nicht mehr die einfachen linearen Beziehungen (132). Wollen wir gar keine besondere Parameterdarstellung hervorheben, so müssen wir vielmehr setzen:

$$(150) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo die x'_i im allgemeinsten Fall von Punkt zu Punkt verschiedene Funktionen der x_i sind. Wir müssen aber annehmen, daß diese Funktionen stetig differenzierbar sind, und die Funktionaldeterminante von null verschieden ist.

Dann bestehen die vier Gleichungen:

$$(151) \qquad dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_4} dx_4 = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Hierbei sind die Koeffizienten $\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$ **von Punkt zu Punkt verschiedene Größen**, zwischen denen im allgemeinen Fall keine Bedingungsgleichungen bestehen. Die Gleichungen (151) stimmen formal mit (133) überein. Beschränken wir uns auf die unendlich kleine Umgebung eines Punktes, so sind auch hier die Koeffizienten als konstant anzusehen, und für die unendlich kleine Verschiebung („Weg"), deren Komponenten dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 sind, gelten dieselben Transformationsgleichungen wie bei endlichen affinen Koordinatensystemen.

Gehen wir also **von endlichen Verschiebungen zu unendlich kleinen** über, beschränken wir uns auf die Umgebung eines Punktes, so können wir bei **beliebiger Parameterdarstellung** der Weltpunkte die **Begriffe Vektoren und Tensoren, sowie deren Transformationsgleichungen unverändert beibehalten**. Vektoren und Tensoren sind aber bei beliebigen Koordinatensystemen an den Punkt gebunden; sie bilden ein Vektor-

oder Tensorfeld, und die Koeffizienten der Transformationsgleichungen variieren von Punkt zu Punkt.

Die Eigenschaften der Invarianz, die bei affinen Koordinatensystemen sich auf endliche Größen und Beziehungen im Endlichen erstreckten, gelten bei beliebigen Koordinatensystemen jeweils nur für die unendlich kleine Umgebung eines Punktes; invariante Beziehungen sind Differentialgleichungen.

Alle Aussagen der allgemeinen Tensoranalysis beziehen sich also auf das Endliche und Unendlichkleine in affinen, oder nur auf das Unendlichkleine in beliebigen Koordinatensystemen. Naturgesetze, die durch Nullsetzen aller Komponenten eines beliebigen Tensors ausgedrückt sind, können Beziehungen zwischen endlichen Größen sein, dann besteht Invarianz in bezug auf die Transformationsgleichungen (132). Oder es sind Differentialgesetze; dann sind sie in bezug auf Koordinatensysteme invariant, für welche (133) oder (151) gilt. Nur in dem auf (151) sich beziehenden Fall sind die Naturgesetze allgemein (d. h. in bezug auf beliebige Koordinatentransformationen) invariant.

Die Lorentz-Transformation (44) ist wegen (45) ein spezieller Fall der Transformationsgleichungen (132). Die Gesetze der Invarianz in bezug auf diese Transformation sind also durch Spezialisierung unserer Tensoranalysis zu erhalten. Die gegen die Lorentz-Transformation invarianten Differentialgesetze sind nicht allgemein invariant. Wenn in den Transformationsgleichungen (44) die Koordinaten x_i durch die Differentiale dx_i ersetzt werden, erhalten wir wegen der Konstanz der Koeffizienten im Endlichen keinen Spezialfall von (151), sondern von (133).

Wir gehen nun zu den wichtigsten Sätzen der Tensoralgebra über. Haben wir zwei Tensoren gleichen Ranges und gleicher Art, so können wir sie, wie aus den Definitionsgleichungen hervorgeht, zu einem neuen Tensor vereinigen, indem wir die entsprechenden Komponenten addieren. Wir nennen diesen Vorgang die Addition von Tensoren. Das Resultat ist ein Tensor gleichen Ranges und gleicher Art. Der Beweis kann auch durch die Transformationsgleichungen gegeben werden, die bei einer solchen Addition ungeändert bestehen bleiben.

Ferner versteht man unter der äußeren Multiplikation von zwei Tensoren die Bildung eines neuen Tensors dadurch, daß

man alle Komponenten des einen Tensors mit allen Komponenten des anderen multipliziert. So erhält man z. B. neue Tensorkomponenten auf folgende Weise:

(152)
$$a_{ik} = a_i b_k$$
$$a^{iklm} = a^{ik} b^{lm}$$
$$a_{ik}^{lm} = a_{ik} b^{lm}.$$

Daß diese Produkte Tensorkomponenten sind, läßt sich beispielsweise für den letzten Fall folgendermaßen nachweisen. a_{ik} und b^{lm} sind Tensorkomponenten; also ist $a_{ik} c^i d^k$ und $b^{lm} e_l f_m$ invariant. Das Produkt beider Summen $a_{ik} b^{lm} c^i d^k e_l f_m$ ist ebenfalls invariant. Die $a_{ik} b^{lm}$ sind demnach die Komponenten eines gemischten Tensors vierten Ranges. Den ersten Fall haben wir bereits S. 71 behandelt. In entsprechender Weise ist der Beweis für den Tensorcharakter des äußeren Produktes zweier oder mehrerer Tensoren stets zu erbringen.

Unter gewissen Umständen kann man auch aus Tensoren höheren Ranges solche von niedrigerem Rang erhalten. Man nennt eine solche Operation die Verjüngung von Tensoren.

Seien die Komponenten a_i^k eines gemischten Tensors II. Ranges gegeben. Wir bilden die Summe $\sum_i a_i^i = a_i^i$ und wollen zeigen, daß sie eine Invariante ist. Nach S. 71 läßt sich a_i^k allgemein darstellen durch:

(153)
$$a_i^k = \sum_{n=1}^{n=4} a_{(n)i} b_{(n)}^k,$$

wobei n sich auf die vier einzelnen Paare der Vektoren bezieht, aus denen die Tensorkomponenten zusammengesetzt werden können. Nun ist aber $a_i b^i$ für jedes Vektorpaar eine Invariante, also ist auch:

(154)
$$a_i^i = \text{Invariante}.$$

Aus einem gemischten Tensor II. Ranges erhält man also durch Gleichsetzung des oberen und unteren Index und Summation über diesen eine Invariante. Der Satz gilt noch allgemeiner:

Setzt man bei einem gemischten Tensor beliebigen Ranges einen oberen einem unteren Index gleich und summiert nach diesem, so erhält man einen gemischten Tensor, der im Rang um zwei Ein-

heiten (die eine kommt auf die oberen, die andere auf die unteren Indices) niedriger ist.

Wir wollen den Beweis für den Tensor a_{il}^{km} erbringen. $a_{il}^{km} b^i c_k d^l e_m$ ist eine Invariante; sondern wir hiervon $a_{il}^{km} b^i c_k$ ab, so ergibt sich aus der soeben angegebenen Invarianz, daß der abgesonderte Teil ein Tensor II. Ranges ist, so daß wir schreiben können:

$$(155) \qquad a_{il}^{km} b^i c_k = f_l^m .$$

Setzen wir $l = m$ und summieren, so ist

$$(156) \qquad a_{il}^{kl} b^i c_k = \text{Invariante};$$

a_{il}^{kl} also ein Tensor II. Ranges, und wir können setzen:

$$(157) \qquad a_{il}^{kl} = a_i^k .$$

Die äußere Multiplikation und die Verjüngung können beide gleichzeitig in Anwendung kommen. So gibt z. B. die äußere Multiplikation von a_{ik} und b^l den Tensor a_{ik}^l, woraus für $k = l$ und Summierung der kovariante Tensor I. Ranges a_i hervorgeht. a_i ist das Ergebnis einer inneren Multiplikation der Tensoren a_{ik} und b^l. Aus a_{ik} und b^{lm} folgt durch äußere Multiplikation und Verjüngung der Tensor a_i^l. Man spricht in diesem Fall von einer gemischten Multiplikation der Tensoren a_{ik} und b^{lm}.

Wir kehren nun wieder zur speziellen Relativitätstheorie zurück, wollen aber zuvor noch einen Tensor, der weiterhin eine bedeutende Rolle spielen wird, in allgemeiner Form kennen lernen. Das invariante Linienelement (59) bezieht sich auf Cartesische Koordinaten. Gehen wir zu einem beliebigen (im Unendlichkleinen affinen) Koordinatensystem durch die Transformation (151) über, so nimmt das Linienelement die Form an:

$$(158) \qquad ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + \cdots = g_{ik} dx_i dx_k (g_{ik} = g_{ki}).$$

ds^2 ist eine Invariante. Die Koeffizienken g_{ik} sind also die Komponenten eines symmetrischen kovarianten Tensors II. Ranges [vgl. (141)]. Wir nennen ihn den allgemeinen Fundamentaltensor. Für die spezielle Relativitätstheorie geht (158) in (59) über. Die Koeffizienten g_{ik} nehmen also die Werte an:

$$(159) \qquad g_{11} = +1, \; g_{22} = +1, \; g_{33} = +1, \; g_{44} = -1, \; g_{ik} = 0 \; (i \neq k).$$

Wir bezeichnen diesen Tensor als Fundamentaltensor der speziellen Relativitätstheorie. Wir benützen diesen, um

den einfachen Zusammenhang abzuleiten, der in der speziellen Relativitätstheorie zwischen kontravarianten und kovarianten Tensoren besteht (vgl. S. 70).

Nach unseren Regeln über innere Multiplikation ist für jeden beliebigen Tensor g_{ik}:

$$a_i = g_{ik} a^k \text{ bzw. } a_{ik} = g_{il} g_{km} a^{lm}.$$

Für den Tensor (159) wird:

$$(160) \qquad a_i = a^i \, (i = 1, 2, 3); \quad a_4 = -a^4$$

bzw.

$$(161) \qquad \begin{matrix} a_{ik} = a^{ik} \, (i, k = 1, 2, 3); & a_{4k} = -a^{4k} \, (k = 1, 2, 3) \\ a_{i4} = -a^{i4} \, (i = 1, 2, 3); & a_{44} = +a^{44}. \end{matrix}$$

Ebenso läßt sich auch zeigen:

$$(162) \qquad a_i^k = a^{ik} \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}; \quad a_4^k = -a^{4k} \, (k = 1, 2, 3, 4).$$

Hätten wir in der speziellen Relativitätstheorie vier aufeinander senkrechte reelle Achsen gewählt, so wäre der Unterschied zwischen kontravariant und kovariant ganz verschwunden.

Allgemein können wir für unsere Wahl des Koordinatensystems die Regel ableiten: tritt in der speziellen Relativitätstheorie bei irgendwelchen Tensorkomponenten der Index $i = 1, 2, 3$ von oben nach unten oder umgekehrt, so behalten diese Komponenten unverändert ihren Wert; für den Index $i = 4$ wird das Zeichen vertauscht, falls die Anzahl der die Stelle wechselnden Indizes ungerade ist.

Diese Beziehungen gelten unabhängig von jedem Koordinatensystem, denn die Koeffizienten des Fundamentaltensors haben stets dieselben Werte (159); sie sind aber an die Bedingungen (45) der Lorentz-Transformation gebunden, sind also nur im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie anwendbar.

Sei nun ferner φ ein Skalar, dessen Wert in unserem vierdimensionalen Kontinuum von Punkt zu Punkt wechselt (Skalarfeld), dann ist die Änderung beim Fortschreiten in einer festgelegten Richtung (d. h. beim Übergang zu einem benachbarten Punkt):

$$(163) \qquad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} dx_4$$

ebenfalls ein Skalar (vgl. S. 57). dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 ist ein kontra-

varianter Vektor. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sind also kovariante Vektorkomponenten (Gradient).

Da φ ein Skalar ist, so können wir (ähnlich wie S. 57) den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$ als kovarianten Vektor auffassen. Doch gilt dies allgemein nur in Verbindung mit einem Skalar. Wir können nun aber zeigen, daß innerhalb der speziellen Relativitätstheorie (jedoch nicht innerhalb der allgemeinen; vgl. II. Teil § 12) das Symbol $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auch in Verbindung mit beliebigen Tensoren als kovarianter Vektor betrachtet werden kann.

Der Ausdruck $f^l_{ik} a^i b^k c_l$ ist eine Invariante. a^i, b^k, c_l sind Komponenten beliebiger Vektoren; wir wollen annehmen, daß diese in jedem System von Ort zu Ort dieselben konstanten Komponenten besitzen. Diese Annahme ist nur für die spezielle Relativitätstheorie, d. h. für lineare Transformationen mit von Punkt zu Punkt konstanten Koeffizienten zulässig. Der Tensor f^l_{ik} möge von Ort zu Ort wechseln. Die Änderung unserer Invariante infolge einer bestimmt gegebenen Verrückung ist wieder eine Invariante, also:

(164) $$\frac{\partial f^l_{ik}}{\partial x_h} a^i b^k c_l \, d x_h = \text{Invariante}.$$

Folglich ist:

(165) $$\frac{\partial f^l_{ik}}{\partial x_h} = f^l_{ikh}.$$

Wir haben den Tensor durch Differentiation im Rang um eine Einheit (kovariant) erhöht. Wir können die Differentiation allgemein als äußere Multiplikation eines Tensors mit dem kovarianten Vektor $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auffassen[1]).

Hieraus ergeben sich leicht einige weitere Sätze.

[1]) Es ist zu beachten, daß dies nur für die spezielle Relativitätstheorie gilt. Auch in der älteren Vektoranalysis ist der Satz in entsprechender Weise gültig (vgl. S. 57). Dort sind jedoch kontravariante und kovariante Vektoren und Tensoren einander gleich.

Sind φ_i die Komponenten eines kovarianten Vektors, so sind $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ diejenigen eines kovarianten Tensors II. Ranges und:

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \tag{166}$$

ist ein ebensolcher antisymmetrischer Tensor. $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}$ ist ein Tensor III. Ranges. Aus (166) folgt nun:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0 . \tag{167}$$

Die linke Seite von (167) ist wieder ein Tensor III. Ranges. (167) sagt aus, daß sämtliche Komponenten dieses Tensors null sind. Ein Naturgesetz, das in die Form (167) gebracht wird, ist deshalb in bezug auf die Lorentz-Transformation invariant.

Aus dem Tensor F_{ik} können wir nach (161) den Tensor F^{ik} bilden, er ist ebenfalls antisymmetrisch.

Durch Verjüngung erhalten wir hieraus den kontravarianten Tensor ersten Ranges:

$$s^i = \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} \quad \text{oder} \quad s^i - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = 0 . \tag{168}$$

Diese Gleichung stellt wiederum eine gegen die Lorentz-Transformation invariante Beziehung dar.

§ 8. Die Elektrodynamik des leeren Raumes.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, daß die Gleichung, welche die Ausbreitung des Lichtes darstellt, in bezug auf die Lorentz-Transformation invariant ist. Das spezielle Relativitätsprinzip verlangt aber, daß die Grundgleichungen für alle Vorgänge in Mechanik und Elektrizität diese Invarianzeigenschaft besitzen sollen.

Trifft dies für die bereits von den älteren Theorien aufgestellten Grundgleichungen nicht zu, so sind diese zu verwerfen und müssen durch neue ersetzt werden.

Wir wollen nun jedoch den Nachweis erbringen, daß die Grundgleichungen der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik gegen die Lorentz-Transformation invariant sind. Es genügt zu diesem Zweck zu zeigen, daß diese Gleichungen sich in vierdimensionaler Ten-

sorform schreiben lassen. Wir legen dabei die Gleichungen der Elektronentheorie in der Form zugrunde, in der wir sie bereits S. 60 zusammengestellt haben.

Nach der Elektronentheorie bleibt die Ladung eines Elektrons unverändert, wenn dieses aus der Ruhe in die Bewegung übergeht. Die Elektrizitätsmenge e bleibt also dieselbe, wenn sie in K oder in dem dazu bewegten System K' ruht. Die **Elektrizitätsmenge** ist demnach eine **Invariante der Lorentz-Transformation.**

Die elektrische **Dichte** ist definiert durch:

(169) $$\varrho = \frac{e}{V};$$

also ist $\varrho \cdot V =$ Invariante.

Das Volumen, das in Ruhe den Betrag V_0 besitzt, wird bei gleichförmiger Translation mit der Geschwindigkeit q [vgl. (66)] $V = V_0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$. Also gilt für die Dichte ϱ beim Übergang aus der Ruhe in die gleichförmige Bewegung wegen $\varrho V = \varrho_0 V_0$ die Transformationsgleichung:

(170) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Die **Ruhedichte** ϱ_0 ist ebenso wie das **Ruhevolumen** V_0 eine Invariante.

Wir führen jetzt einige neue Vektoren ein; zunächst die **Vierergeschwindigkeit.** Für einen bewegten Punkt ist dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 ($= c\,dt$) ein kontravarianter Vierervektor von zeitartiger Richtung. Dieser Vektor bleibt bestehen, wenn wir jede Komponente durch das invariante Linienelement ds (vgl. S. 31 u. 40) dividieren; also ist die **Vierergeschwindigkeit:**

(171) $$u^i = \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ebenfalls ein kontravarianter zeitartiger Vierervektor.

Beachten wir die Gleichung (vgl. S. 34 u. 41):

(172) $$ds = c\,dt \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = dt\sqrt{c^2 - q^2}$$

und (vgl. S. 48):

$$\text{(71)} \qquad \frac{dx_1}{dt} = \mathfrak{q}_x, \quad \frac{dx_2}{dt} = \mathfrak{q}_y, \quad \frac{dx_3}{dt} = \mathfrak{q}_z,$$

so ist:

$$\text{(173)} \qquad \begin{aligned} u^1 &= \frac{dx_1}{ds} = \frac{\mathfrak{q}_x}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}; \quad u^2 = \frac{\mathfrak{q}_y}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}; \\ u^3 &= \frac{\mathfrak{q}_z}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}; \quad u^4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Die Vierergeschwindigkeit eines Weltpunktes ist damit durch die räumliche Geschwindigkeit q dieses Punktes und ihre drei Komponenten $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$ ausgedrückt.

Bilden wir die Komponenten der Stromdichte: $\frac{\varrho \mathfrak{q}_x}{c}$, $\frac{\varrho \mathfrak{q}_y}{c}$, $\frac{\varrho \mathfrak{q}_z}{c}$ und nehmen hierzu ϱ, so folgt aus (173) und (170), indem wir $1:\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$ durch ϱ ersetzen, daß diese vier Größen wiederum einen kontravarianten Vierervektor darstellen. Er lautet:

$$\text{(174)} \qquad s^1 = \frac{\varrho \mathfrak{q}_x}{c}, \quad s^2 = \frac{\varrho \mathfrak{q}_y}{c}, \quad s^3 = \frac{\varrho \mathfrak{q}_z}{c}, \quad s^4 = \varrho.$$

Den aus Stromdichte und Ladungsdichte gebildeten Vierervektor s^i nennen wir den Viererstrom.

Ferner kennt die Lorentzsche Elektrodynamik den Begriff des dreidimensionalen Vektorpotentials, dessen drei Komponenten $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ durch:

$$\text{(175)} \qquad -\mathfrak{H} = \text{rot}\, \mathfrak{f}$$

definiert sind, sowie das skalare Potential φ, definiert durch:

$$\text{(176)} \qquad \mathfrak{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = \text{grad}\, \varphi;$$

wobei $\mathfrak{f}$ und φ durch die Gleichung:

$$\text{(177)} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}\, \mathfrak{f} = 0$$

miteinander verbunden sind.

Die vier Größen $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$, φ bilden nun ebenfalls einen kontravarianten Vierervektor. Der Beweis ist folgender. Aus (175), (176)

und (177) sowie den Grundgleichungen (112) div $\mathfrak{E} = \varrho$ und (111) rot $\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\varrho \mathfrak{q}}{c}$ ergeben sich die Wellengleichungen[1]):

(178) $$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \varrho$$

und

(179) $$\Delta \mathfrak{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial t^2} = \frac{\varrho \mathfrak{q}}{c};$$

(179) ist die Zusammenfassung von drei Komponentengleichungen. Die Komponenten von $\mathfrak{f}$ sind mit denen von $\frac{\varrho \mathfrak{q}}{c}$ in derselben Weise verknüpft wie φ mit ϱ. Da $\frac{\varrho \mathfrak{q}}{c}$ sich durch ϱ zu einem Vierervektor ergänzt, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{f}$ und φ. Wir bezeichnen den letzteren Vierervektor als elektromagnetisches Viererpotential φ^i und setzen:

(180) $$\varphi^1 = \mathfrak{f}_x, \ \varphi^2 = \mathfrak{f}_y, \ \varphi^3 = \mathfrak{f}_z, \ \varphi^4 = \varphi,$$

oder für die kovarianten Komponenten nach (160):

(181) $$\varphi_1 = \mathfrak{f}_x, \ \varphi_2 = \mathfrak{f}_y, \ \varphi_3 = \mathfrak{f}_z, \ \varphi_4 = -\varphi.$$

Aus dem kovarianten Vektor (181) bilden wir nach (166) einen antisymmetrischen Tensor II. Ranges. Wir erhalten z. B. für die Komponenten:

(182) $$F_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial x} = + \mathfrak{H}_z$$
$$F_{14} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = + \mathfrak{E}_x \text{ usw.}$$

Hierbei sind die Größen $\mathfrak{H}_z$ und $\mathfrak{E}_x$ zufolge den Definitionsgleichungen (175) und (176) angesetzt. Die ganze Durchrechnung ergibt:

(183) $$F_{14} = \mathfrak{E}_x, \quad F_{24} = \mathfrak{E}_y, \quad F_{34} = \mathfrak{E}_z$$
$$F_{23} = \mathfrak{H}_x, \quad F_{31} = \mathfrak{H}_y, \quad F_{12} = \mathfrak{H}_z$$

[1]) Siehe M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. II. Leipzig 1914, § 6. Die elektromagnetischen Potentiale; oder auch R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis. Leipzig 1905, Kapitel IV. § 12. Die retardierten Potentiale. Die Definition der Δ siehe S. 59.

oder

$$(184)\qquad \begin{array}{lll} F^{14} = -\mathfrak{E}_x, & F^{24} = -\mathfrak{E}_y, & F^{34} = -\mathfrak{E}_z \\ F^{23} = \mathfrak{H}_x, & F^{31} = \mathfrak{H}_y, & F^{12} = \mathfrak{H}_z. \end{array}$$

Bei der Vertauschung von jeweils zwei Indizes kehren sich die Vorzeichen der Komponenten um.

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes sind also Komponenten eines antisymmetrischen Tensors II. Ranges F^{ik} (man bezeichnet diesen nach einer älteren Terminologie auch als Sechservektor); sie lassen sich nach (166) auf die Komponenten des elektromagnetischen Viererpotentials (180) oder (181) zurückführen. Zur Beschreibung aller elektromagnetischen und optischen Vorgänge ist also nur die Kenntnis des Viererpotentials notwendig.

Wir zerlegen nun die Grundgleichungen der Elektronentheorie (110) bis (113) in ihre Komponenten und erhalten zwei Gruppen von je vier Gleichungen:

$$(185)\qquad \begin{array}{rl} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} &= \frac{1}{c}\varrho \mathfrak{q}_x \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= \frac{1}{c}\varrho \mathfrak{q}_y \\ +\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} &= \frac{1}{c}\varrho \mathfrak{q}_z \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} &= \varrho \end{array}$$

sowie:

$$(186)\qquad \begin{array}{rl} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} &= 0 \\ -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} &= 0 \\ +\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} &= 0. \end{array}$$

Die Definitionsgleichungen (174), (183) und (184) lassen erkennen, daß man die Gleichungssysteme (185) und (186) in der vierdimensionalen vektoriellen Form schreiben kann:

(187) $$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und:

(188) $$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, 3, 4)^{1)}.$$

Die Gleichungen sind völlig mit (167) und (168) identisch; damit ist der Beweis erbracht, daß die Feldgleichungen der Elektronentheorie in bezug auf die Lorentz-Transformation invariant sind. Die Feldgleichungen sind also in unserem S. 41 formulierten Sinn bereits als physikalisch „richtig" anzusehen. Diese Invarianz der elektromagnetischen Grundgleichungen gegenüber der Lorentz-Transformation ist nicht nur eine analytische Eigenschaft derselben; sie besagt vielmehr, daß alle rein elektromagnetischen Bewegungs-Vorgänge insofern relative sind, als sie eine gleichförmige Translation des Bezugssystems unbestimmt lassen. Vor allem aber spricht sie zugunsten der Lorentz-Transformation selbst. Wir haben in den Feldgleichungen der Elektronentheorie ein System von Gleichungen, das die Erscheinungen der Elektrizität und Optik im Bereich unserer Beobachtungsgenauigkeit völlig hinreichend wiedergibt; daß diese schon vor Aufstellung des speziellen Relativitätsprinzips gewonnenen Gleichungen letzteres erfüllen, zeigt wohl, daß unser Prinzip in seiner mathematischen Fassung (S. 30) als Grundlage der theoretischen Physik eine tiefere Berechtigung hat. Die Grundgleichungen sind nun aber Differentialgesetze; sie beschreiben die Vorgänge im Unendlichkleinen. Da die allgemeine Relativitätstheorie andererseits im Unendlichkleinen bei besonderer Wahl des Koordinatensystems in die spezielle übergeht (vgl. S. 15), so ist die Invarianz unserer Differentialgleichungen zugleich eine wesentliche Stütze für das allgemeine Relativitätsprinzip.

Die Gleichungen der Elektrodynamik in ihrer älteren Form, sowie in derjenigen der Tensoranalysis, beziehen sich zunächst auf ein „ruhendes" System K. Gehen wir aus ihm in ein anderes K', K'' ... über, so bleiben zwar die Grundgleichungen formal ungeändert; die darin auftretenden Größen nehmen jedoch in

[1]) Die Anzahl der Gleichungen (188) ist diejenige der Anzahl der Kombinationen aus 4 Elementen zur dritten Klasse ohne Wiederholung, also 4.

jedem System andere Werte an. Da diese Größen Vektoren und Tensoren sind, so gelten für sie die in § 7 aufgestellten Transformationsgleichungen. Wir wollen nun im allgemeinen von der Herleitung spezieller Transformationsgleichungen in der Elektrodynamik absehen, doch aber an zwei Beispielen die Art der Ableitung zeigen.

Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß der Übergang von K' nach K zufolge der speziellen Lorentz-Transformation (43) erfolgt. Kontravariante Vierervektoren transformieren sich wie die Koordinaten. Also ist für den Viererstrom nach (43):

$$(189) \qquad \varrho \mathfrak{q}_x = \varrho' \frac{\mathfrak{q}'_x + v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \varrho \mathfrak{q}_y = \varrho' \mathfrak{q}'_y, \qquad \varrho \mathfrak{q}_z = \varrho' \mathfrak{q}'_z$$

$$\varrho = \varrho' \frac{1 + \frac{v \mathfrak{q}'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für kovariante Tensoren II. Ranges gelten die Transformationsgleichungen (144), die wir auch schreiben können:

$$(190) \qquad F_{ik} = \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} F'_{lm}.$$

So ist z. B.:

$$(191) \qquad F_{12} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} F'_{12} + \frac{\partial x'_4}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} F'_{42};$$

die übrigen Glieder fallen fort. Unter Berücksichtigung der Lorentz-Transformation (39) und der Beziehungen (183) erhält man:

$$(192) \qquad \mathfrak{H}_z = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathfrak{H}'_z + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathfrak{E}'_y.$$

Auf diese Weise leitet man folgendes System von Transformationsgleichungen für die Komponenten des elektromagnetischen Feldes her:

$$(193) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_x & \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}'_x \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\mathfrak{E}'_y + \beta \mathfrak{H}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_y &= \frac{\mathfrak{H}'_y - \beta \mathfrak{E}'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\mathfrak{E}'_z - \beta \mathfrak{H}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & \mathfrak{H}_z &= \frac{\mathfrak{H}'_z + \beta \mathfrak{E}'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}$$

Die Zerlegung des elektromagnetischen Feldes in einen elek-

trischen und einen magnetischen Teil hat also nur relative Bedeutung.

Wir stellen nun die für die Relativitätstheorie wichtigsten Tensoren, die Viererkraft und den Energie-Impuls-Tensor, auf.

Die Dichte der ponderomotorischen Kraft des elektromagnetischen Feldes war:

$$(114) \qquad \mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]\right).$$

Wir können auch diese in eine andere Form bringen.

Wir setzen die Beziehung an:

$$(194) \qquad p^i = F^{ik} s_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und berechnen die vier Komponenten. Es ist unter Beachtung von (184), (174) und (85):

$$(195) \qquad p^1 = F^{12} s_2 + F^{13} s_3 + F^{14} s_4 = \frac{\varrho \mathfrak{q}_y}{c}\mathfrak{H}_z - \frac{\varrho \mathfrak{q}_z}{c}\mathfrak{H}_y + \varrho \mathfrak{E}_x = \varrho\left(\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]_x\right) = \mathfrak{F}_x;$$

ebenso ist $p^2 = \mathfrak{F}_y$; $p^3 = \mathfrak{F}_z$. Die drei ersten Gleichungen von (194) stimmen also mit (114) überein.

Ferner[1]):

$$(196) \qquad p^4 = \frac{\varrho}{c}(\mathfrak{q}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{q}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{q}_z \mathfrak{E}_z) = \frac{1}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{F}).$$

$\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ ist die in der Zeiteinheit von der Kraftdichte geleistete Arbeit, also die Leistungsdichte des elektromagnetischen Feldes.

Die Komponenten der Kraftdichte bilden zusammen mit der Leistungsdichte (als zeitlicher Komponente) einen kontravarianten Vierervektor p^i, den wir Viererkraft des elektromagnetischen Feldes nennen.

Wir können auch eine kovariante Viererkraft definieren durch:

$$(197) \qquad p_i = F_{ik} s^k,$$

wobei der Übergang von den kontravarianten Vektoren und Tensoren zu den kovarianten und umgekehrt nach (161) und (162) erfolgt. Ebenso wie nun in der Maxwellschen Elektrodynamik die auf die Volumeneinheit wirkende ponderomotorische Kraft durch

[1]) Man beachte, daß $\mathfrak{q}$ und $[\mathfrak{q}\mathfrak{H}]$ zwei Vektoren sind, die aufeinander senkrecht stehen. Deren skalares Produkt ist nach (80) null.

einen symmetrischen Spannungstensor dargestellt wurde (S. 65), kann auch die Viererkraft aus einem vierdimensionalen symmetrischen Tensor, dem **Energie-Impuls-Tensor**, oder kürzer **Energie-Tensor**, hergeleitet werden.

Wir setzen:

(198) $$S_i^k = F_{ir} F^{kr} - \tfrac{1}{2} \delta_i^k |F|^2,$$

wo δ_i^k den Tensor mit den Komponenten $1 (i = k)$ und $0 (i \neq k)$ bedeutet (vgl. S. 73) und:

(199) $$|F|^2 = \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik}$$

ist. Wir berechnen den Ausdruck[1]):

(200) $$\frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = \sum_{k,r} F_{ir} \frac{\partial F^{kr}}{\partial x_k} + \sum_{k,r} F^{kr} \frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \sum_k \delta_k^i \frac{\partial |F|^2}{\partial x_k}.$$

Hierbei wird für die rechte Seite:

$$\text{I. Glied} = - \sum_r F_{ir} s^r = - p_i$$

wegen (187) und (197);

$$\text{II. Glied} = \sum_{k,r} F^{kr} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,r} F^{kr} \left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} \right),$$

weil:

$$\sum_{k,r} F^{kr} \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} = \sum_{k,r} F^{rk} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_r} = \sum_{k,r} F^{kr} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r};$$

$$\text{III. Glied} = - \frac{1}{2} \frac{\partial |F|^2}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k,r} \left(F_{kr} \frac{\partial F^{kr}}{\partial x_i} + F^{kr} \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} \right)$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{k,r} F^{kr} \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i}$$

wegen (161).

Also ist:

$$\text{(II. + III.) Glied} = - \frac{1}{2} \sum_{k,r} F^{kr} \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_r} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ri}}{\partial x_k} \right) = 0$$

wegen (167).

[1]) Wir schreiben ausnahmsweise die Summenzeichen.

Wir erhalten demnach für die kovariante Viererkraft die Gleichung:

$$(201) \qquad -p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

oder für die kontravariante Viererkraft:

$$(202) \qquad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k}.$$

Damit ist die Viererkraft auf einen Tensor II. Ranges, den Energie-Impuls-Tensor, zurückgeführt. Daß er symmetrisch ist, zeigt unmittelbar der Ansatz (198).

Die Beziehungen (201) und (202) sind ebenso wie die Definitionsgleichungen (194) und (197) in bezug auf die Lorentz-Transformation invariant; wir haben immer wieder von den Ableitungen des § 7 Gebrauch gemacht, die sich auf die spezielle Relativitätstheorie beschränken (S. 77ff.). Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors lassen sich nun aus bekannten Größen der Elektrodynamik darstellen.

Wir gehen von (198) aus und beachten (183) und (184).

Dann ist z. B.:

$$S_1^1 = F_{1r}F^{1r} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}F_{kr}F^{kr}) = \mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{H}_x^2,$$

oder nach (129):

$$S_1^1 = S^{11} = \mathfrak{s}_{xx}.$$

Ferner:

$$S_1^4 = F_{1r}F^{4r} = \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x,$$

oder nach (116):

$$S^{41} = S^{14} = \frac{\mathfrak{S}_x}{c};$$

schließlich:

$$S_4^4 = -\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2) = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2),$$

oder nach (115):

$$S^{44} = W.$$

Führen wir die Rechnung vollständig durch, so erhalten wir für den kontravarianten Energie-Impuls-Tensor S, aus dem nach (202) die Viererkraft folgt, die folgenden kontravarianten Komponenten S^{ik}:

(203)
$$S = \begin{matrix} \mathfrak{s}_{xx} & \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{xz} & \frac{\mathfrak{S}_x}{c} \\ \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{yy} & \mathfrak{s}_{yz} & \frac{\mathfrak{S}_y}{c} \\ \mathfrak{s}_{xz} & \mathfrak{s}_{yz} & \mathfrak{s}_{zz} & \frac{\mathfrak{S}_z}{c} \\ \frac{\mathfrak{S}_x}{c} & \frac{\mathfrak{S}_y}{c} & \frac{\mathfrak{S}_z}{c} & W. \end{matrix}$$

Hierbei sind die $\mathfrak{s}_{xx}$, $\mathfrak{s}_{xy}$ ... die Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors (129), $\mathfrak{S}_x$, $\mathfrak{S}_y$, $\mathfrak{S}_z$ die Komponenten des Poyntingschen Vektors (116) und W die Dichte der elektromagnetischen Energie (115). Wir werden diesem Tensor sogleich noch eine etwas andere Form geben.

Wir wollen zeigen, daß die Gleichungen:

(202)
$$p^i = -\frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k}$$

zugleich den Energiesatz und die Impulssätze der Elektrodynamik enthalten, daß sie also die dynamische Grundgleichung der Theorie der Elektrizität und Optik darstellen.

Wir betrachten zuerst die zeitliche Komponente. Nach (196) war $p^4 = \frac{1}{c}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$.

Ferner ist:

(204)
$$\frac{\partial S^{4k}}{\partial x_k} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\mathfrak{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t},$$

also ist:

(205)
$$\frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}) + \operatorname{div}\mathfrak{S} = 0.$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ ist die Zunahme der elektromagnetischen Energiedichte in der Zeiteinheit; $(\mathfrak{q}\,\mathfrak{F})$ ist die Arbeitsleistung der ponderomotorischen Kraft, also die Zunahme der mechanischen Energiedichte in der Zeiteinheit, wofür $\frac{\partial A}{\partial t}$ geschrieben werden kann. Die beiden ersten Summanden geben die gesamte Zunahme der Energiedichte. Nach S. 58 stellt nun die Divergenz eine in der Zeiteinheit aus der

Volumeneinheit austretende Strömung dar. Deuten wir den Vektor $\mathfrak{S}$ als elektromagnetische Energieströmung, so sagt unsere Gleichung in der Form:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{S} \tag{206}$$

aus: die gesamte in der Zeiteinheit erfolgende Zunahme der Energiedichte ist gleich der in die unendlich kleine Volumeneinheit eintretenden Energieströmung. Durch Einführung des Begriffes der elektromagnetischen Energieströmung haben wir so den ursprünglich für rein mechanische Vorgänge gefundenen Satz der Erhaltung der Energie auf die Elektrodynamik ausgedehnt. Zugleich ist durch (206) die Definition der Größe W (vgl. S. 61) als elektromagnetische Energiedichte gerechtfertigt.

Eine Bemerkung ist noch wegen der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial t}$ bzw. $\frac{\partial A}{\partial t}$ hinzuzufügen. Die zeitliche Änderung der Energiedichte eines kleinen materiellen Raumteilchens kann einmal dadurch bedingt sein, daß die Energie an einer gegebenen Stelle sich ändert; wir schreiben hierfür $\frac{\partial W}{\partial t}$. Es kann aber auch durch Lageänderung des Raumteilchens eine Dichteänderung eintreten; letztere ist dann $\frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt}$. Die gesamte zeitliche Änderung der Energiedichte eines bewegten materiellen Raumteilchens ist demnach:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{207}$$

Für unseren Energiesatz (206) kommt nur die Änderung für ein mit einem „ruhenden" Koordinatensystem fest verbundenes Raumteilchen, also die Änderung an einem gegebenen Ort $\frac{\partial W}{\partial t}$ in Frage. Betrachten wir dagegen einen sich unter dem Einfluß rein mechanischer Kräfte bewegenden Massenpunkt, so ist die gesamte Energieänderung durch die Einwirkung der Kraft bedingt und wir können setzen: $\frac{dE}{dt} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{K}$. Dieselben Überlegungen gelten auch z. B. für den Impuls.

Ist nun in Gleichung (206) div $\mathfrak{S} = 0$, tritt also in die Volumeneinheit Energie weder aus noch ein, so ist:

(208) $$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0,$$

oder:

(209) $$W + A = \text{konstant}.$$

Es findet also nur eine Umsetzung von elektromagnetischer Energie in mechanische und umgekehrt statt.

Betrachten wir rein elektrodynamische Vorgänge, so ist $A = 0$, also lautet unser Energiesatz für die Volumeneinheit:

(210) $$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0.$$

Wir behandeln nun die drei räumlichen Komponenten von (202) zusammen. Es ist [vgl. (127)]:

(211) $$p^1 = \mathfrak{F}_x = -\frac{\partial S^{1k}}{\partial x_k} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{s}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}\right)$$
$$= \mathfrak{P}_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}.$$

Entsprechende Werte erhalten wir für p^2 und p^3; die Zusammenfassung in eine dreidimensionale Vektorgleichung ergibt also:

(212) $$\mathfrak{F} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} = \mathfrak{P} = -\,\mathfrak{div}\,\mathfrak{s}.$$

Damit ist der zwischen den Größen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}$ bestehende Zusammenhang (vgl. S. 65) gefunden. Wir wollen zeigen, daß die Gleichung (212) den Satz der Erhaltung des Impulses in der Elektrodynamik darstellt.

Erinnern wir uns zunächst an die Bedeutung, welche dieser Satz (auch als Satz der Erhaltung der Bewegungsgröße oder Impulsgröße bezeichnet) in der klassischen Mechanik hat.

Wir bezeichnen als mechanischen Impuls die Größe:

(213) $$\mathfrak{G} = m\frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

so daß, wenn $\mathfrak{K}$ die wirkende Kraft ist, die Bewegungsgleichungen lauten:

(214) $$\mathfrak{K} = m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

$\mathfrak{K}$ ist also die Zunahme des Impulses in der Zeiteinheit; (214)

sagt aus, daß der Impuls des sich bewegenden Massenpunktes nur durch Einwirkung einer Kraft anwächst. Ist ein mechanisches System im Gleichgewicht, ist also für dieses $\Sigma\mathfrak{K} = 0$, so ist auch $\sum \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0$, oder:

$$\Sigma\mathfrak{G} = \text{konstant.} \tag{215}$$

Die letztere Gleichung stellt den Satz der Erhaltung der Impulsgröße im engeren Sinn dar; nach (215) ist die Summe der Impulse eines abgeschlossenen Systems konstant.

Nun gehen wir zu (212) zurück. Die ponderomotorische Kraftdichte $\mathfrak{F}$ ist dort die durch die elektromagnetische Kraftwirkung bedingte Zunahme des mechanischen Impulses $\mathfrak{G}$, bezogen auf die „ruhende" Volumeneinheit, also der Impulsdichte. Wir können setzen:

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t}. \tag{216}$$

Um in Übereinstimmung mit dem mechanischen Impulssatz zu bleiben, deuten wir ferner die Größe:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} \tag{217}$$

als elektromagnetische Impulsdichte[1]), sowie $\mathfrak{P} = -\operatorname{div}\mathfrak{s}$ als elektromagnetische Impulsströmung. Jede Komponente der Impulsströmung ist eine Divergenz, also eine Strömung in dem S. 58 erläuterten Sinn. Die die Impulsströmung charakterisierenden Größen sind die Komponenten der Maxwellschen Spannung, sie bilden also einen dreidimensionalen kontravarianten Tensor II. Ranges.

Die Gleichung (212) sagt nun aus, daß die Zunahme des mechanischen und elektromagnetischen Impulses zusammen gleich der eintretenden Impulsströmung bezogen auf Volumen- und Zeiteinheit ist. Wir haben damit die allgemeinste Form des Satzes der Erhaltung des Impulses, den wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{s}. \tag{218}$$

[1]) Dieser Begriff gilt in der Physik unabhängig von der Relativitätstheorie. Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Bd. II, 3. Aufl. Leipzig 1914. S. 189.

Findet für ein System kein Zu- oder Abströmen des elektromagnetischen Impulses statt, ist $\mathfrak{div}\,\mathfrak{s} = 0$, so ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = 0 \tag{219}$$

oder:

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{g} = \text{konstant}. \tag{220}$$

Die Summe aus mechanischem und elektromagnetischem Impuls bleibt also für die Volumeneinheit unverändert.

Betrachten wir wieder rein elektromagnetische Vorgänge, so geht (218) über in:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \mathfrak{P} = -\,\mathfrak{div}\,\mathfrak{s}\,. \tag{221}$$

Infolge der Einführung der elektromagnetischen Impulsdichte $\mathfrak{g}$, die an Stelle von $\frac{1}{c}\mathfrak{S}$ in den letzten Gliedern der drei räumlichen Komponenten von (202) tritt, ist nun der Energie-Impuls-Tensor (203) in der Form zu schreiben:

$$S = \begin{matrix} \mathfrak{s}_{xx} & \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{xz} & c\,\mathfrak{g}_x \\ \mathfrak{s}_{xy} & \mathfrak{s}_{yy} & \mathfrak{s}_{yz} & c\,\mathfrak{g}_y \\ \mathfrak{s}_{xz} & \mathfrak{s}_{yz} & \mathfrak{s}_{zz} & c\,\mathfrak{g}_z \\ \frac{\mathfrak{S}_x}{c} & \frac{\mathfrak{S}_y}{c} & \frac{\mathfrak{S}_z}{c} & W. \end{matrix} \tag{222}$$

Aus diesen endgültigen Werten des Energie-Impuls-Tensors ergeben sich nach (202) die gegen die Lorentz-Transformation invarianten Energie- und Impulssätze. Da die Komponenten des Tensors (222) aus dem Viererpotential (180) bzw. (181) hergeleitet werden können, so sind auf letzteres die sämtlichen Zustandsgrößen der Elektrodynamik zurückgeführt.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik der speziellen Relativitätstheorie haben sich im Vorhergehenden als identisch mit denjenigen der Elektronentheorie erwiesen. Nur galten diese in der Elektronentheorie für ein bevorzugtes System, während sie in Wirklichkeit in allen Systemen bestehen, die durch irgendeine Lorentz-Transformation auseinander hervorgehen. Diese Sachlage bringt es mit sich, daß die Elektrodynamik der Relativitätstheorie zu keinen neuen Ergebnissen führt, wenn auch in ihr die besonderen Annahmen, welche die Elektronentheorie zur Erklärung einzelner Er-

scheinungen machen mußte, in Wegfall kommen (vgl. S. 17). Dasselbe gilt für die Optik; Erscheinungen wie z. B. Aberration oder Dopplersches Prinzip ergeben sich ohne weiteres aus dem speziellen Relativitätsprinzip.

Die Relativitätstheorie ist nun auch in der Lage, in einfacher Weise eine Elektrodynamik bewegter Körper aufzubauen[1]). Doch würde es den Rahmen dieser Einführung überschreiten, wenn solche spezielleren Fragen hier behandelt werden sollten. Ebenso muß auf eine Darstellung der Thermodynamik verzichtet werden; wir müssen uns vielmehr dem wichtigsten Gebiet der Relativitätstheorie, der Mechanik, zuwenden.

§ 9. Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie. Materie und Energie.

Die klassische Mechanik gehorcht dem speziellen Relativitätsprinzip in der ihm S. 30 gegebenen mathematischen Formulierung nicht; ihre Grundgleichungen sind gegen die Lorentz-Transformation nicht invariant.

Wir müssen also die Mechanik auf neuer Grundlage aufbauen. Die Elektrodynamik hatte uns auf die Grundgleichungen (202) geführt, die sich in den Satz der Erhaltung der Energie (205) und der Erhaltung des Impulses (212) zerlegen ließen.

Beide Erhaltungssätze stellen, wie schon im vorhergehenden Paragraphen (S. 91 u. 92) ausgeführt wurde, Erfahrungstatsachen dar, die zuerst in der Mechanik gewonnen worden sind. Die Sätze der Erhaltung der Energie und des Impulses müssen also auch die wesentlichsten Grundlagen der neuen Mechanik bilden.

In welcher analytischen Form sind sie anzusetzen?

Beide Sätze müssen auch in der Mechanik gegen die Lorentz-Transformation invariant sein. Treten mechanische und elektrodynamische Vorgänge zusammen auf, so muß die Beschreibung dieser gemeinsamen Vorgänge nach dem Relativitätsprinzip in allen Systemen K, K' ... dieselbe sein. Seien z. B. Kräfte mechanischen

[1]) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math. Phys. Kl. Sitzung vom 21. Dez. 1907. Abgedruckt in H. Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Leipzig 1910.

und elektrodynamischen Ursprungs in einem System im Gleichgewicht, so müssen sie es in jedem anderen auch bleiben. Alle ponderomotorischen Kräfte, nicht nur diejenigen des elektromagnetischen Feldes, müssen sich der Lorentz-Transformation gegenüber gleich verhalten. Wir geben deshalb den Erhaltungssätzen bei rein mechanischen Vorgängen dieselbe Form wie bei rein elektrodynamischen Vorgängen [vgl. (210) und (221)]; wir ordnen damit formal die Mechanik der Elektrodynamik unter.

Der Satz der Erhaltung der Energie lautet also in der Mechanik:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0\,, \tag{223}$$

der Satz der Erhaltung des Impulses:

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = - \mathfrak{Div}\, \mathfrak{s}\,. \tag{224}$$

Beide Gleichungen gelten wieder für die Volumeneinheit; wir werden also durch unsere Ansätze zunächst auf eine Mechanik der Kontinua geführt. Die Bedeutung der Größen $\mathfrak{s}_{xx}$, $\mathfrak{s}_{xy}\,\ldots$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{g}$ und W ist nun natürlich eine andere als in der Elektrodynamik, doch bilden sie in ihrer Gesamtheit wieder einen kontravarianten, symmetrischen Tensor II. Ranges. W ist jetzt die mechanische Energiedichte, deren Änderung durch ein Zu- oder Abströmen von Energie (durch eine Arbeitsleistung in irgendeinem Sinn) bedingt ist. Wir dehnen also die Vorstellung der Energieströmung als Vektor $\mathfrak{S}$ auch auf die Mechanik[1]) aus, indem wir alle Energieübertragung als Vorgänge der Nahewirkung auffassen. Dazu gehören: mechanische Energieleitung durch Druck oder Stoß, Wärmestrahlung und Wärmeleitung, Konvektionsströmung von Atomen und Elektronen, schließlich auch die Energiefortpflanzung der Gravitation. Unsere Gleichung (223) sagt dann aus, daß die Änderung der Energiedichte an irgendeiner Stelle in der Zeiteinheit gleich der in die Volumeneinheit ein- oder austretenden Energieströmung ist.

In Gleichung (224) bedeutet $\mathfrak{g}$ nun den mechanischen Impuls der Volumeneinheit und die Impulsänderung $\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$ die von der Vo-

[1]) Vgl. M. Planck, Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik. Physik. Zeitschr. Bd. 9, S. 828, 1908.

lumeneinheit ausgehende oder auf dieselbe einwirkende mechanische Kraft. In unserer Nahewirkungsmechanik ist die Impulsänderung durch eine mechanische Impulsströmung hervorgerufen, die durch die Komponenten $\mathfrak{s}_{ik}$ eines dreidimensionalen Spannungstensors festgelegt ist. Die Wirkung beliebiger mechanischer Kräfte läßt sich durch einen solchen Tensor darstellen; der Spannungstensor der Elastizitätstheorie ist nur ein spezieller Fall.

Impulsdichte und Energieströmung stehen auch in der Mechanik in dem einfachen Zusammenhang:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}. \tag{225}$$

Der strömenden Energie kommt also ein Impuls zu (Satz vom Impuls des Energiestroms).

Betrachten wir nicht rein mechanische Vorgänge, sondern solche die teils mechanischer, teils elektromagnetischer Natur sind, so können wir — wie aus den Erwägungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen hervorgeht — die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses in derselben Form (223) und (224) beibehalten. Die darin vorkommenden Größen bedeuten dann gleichzeitig mechanische und elektromagnetische Energie, Impulskomponenten usw. Wie auch Gleichung (209) und (220) zeigt, stellen die mechanischen und elektromagnetischen Zustandsgrößen nur verschiedene Erscheinungsformen der einen Energie, des einen Impulses dar. Doch wir wollen uns im folgenden lediglich auf mechanische Vorgänge beschränken.

Die Gleichungen (223) und (224) sind aus (202) dadurch hervorgegangen, daß wir $p^i = 0$ setzten. Wir können also auch für die Mechanik beide wieder in die Form:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{226}$$

zusammenfassen. Wir haben damit die dynamische Grundgleichung der Mechanik gewonnen. T^{ik} ist ein Tensor der S. 94 angegebenen Art, für welchen wir einen Inhalt suchen müssen.

Durch folgenden Ansatz, den wir für die Mechanik des Punktes eingehender erörtern wollen, werden wir zu Gleichungen geführt, welche die Newtonschen Grundgleichungen als Näherungsglei-

chungen enthalten. Unser Ansatz steht also dadurch mit der Wirklichkeit von vornherein in weitem Maße in Übereinstimmung. Wir zerlegen T^{ik} in zwei Tensoren:

$$T^{ik} = R^{ik} + S^{ik}. \tag{227}$$

Hierbei ist:

$$R^{ik} = c^2 \mu_0 u^i u^k = c^2 \mu_0 \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \tag{228}$$

μ_0 ist die der elektromagnetischen (vgl. S. 81) entsprechende **mechanische Ruhedichte.** u^i bzw. u^k sind die Komponenten der Vierergeschwindigkeit (vgl. S. 81). R^{ik} hängt lediglich von der bewegten Materie ab; der Tensor R^{ik} heißt **Energie-Impuls-Tensor** (oder Energietensor) der Materie. Wählen wir die Zeiteinheit so, daß $c = 1$ wird (vgl. S. 24), so ist:

$$R^{ik} = \mu_0 u^i u^k. \tag{229}$$

S^{ik} ist ein Tensor, der die auf die Volumeneinheit einwirkenden äußeren Kräfte festlegt. Nach (202) können wir formal setzen:

$$\frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k} = -p^i, \tag{230}$$

wo nun die p^i die Komponenten der äußeren mechanischen Viererkraft (vgl. S. 87) sind. **Wirkt keine äußere Kraft**, so ist $p^i = 0$ und:

$$T^{ik} = R^{ik} = c^2 \mu_0 u^i u^k. \tag{231}$$

Wir können nun dem Ausdruck $\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k}$ eine einfachere Form geben.

Wir erhalten:

$$\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k} = c^2 u^i \frac{\partial (\mu_0 u^k)}{\partial x_k} + c^2 \mu_0 u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k}. \tag{232}$$

Der Ausdruck $\frac{\partial (\mu_0 u^k)}{\partial x_k}$ ist null. Wir können ihn nämlich in der Form schreiben:

$$\frac{\partial (\mu_0 u^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_0 \frac{\partial x_1}{\partial x_4} \frac{dx_4}{ds}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\mu_0 \frac{dx_4}{ds}\right). \tag{233}$$

Da nach (173) $\frac{dx_4}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ und nach (170) die Größe $\frac{\mu_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = \mu$ ist, wobei μ die Dichte der Materie in demjenigen System bedeutet, in welchem die Bewegung mit der Geschwindigkeit q erfolgt, so lautet unser Ausdruck nun:

(234) $$\frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu \frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right) + \cdots + \frac{\partial \mu}{\partial x_4}.$$

Setzen wir diesen null, so erhalten wir in älterer Bezeichnung:

(235) $$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \mathfrak{q}) = 0.$$

Wir haben damit die Kontinuitätsgleichung der Materie[1]) erhalten, d. h. den analytischen Ausdruck dafür, das diejenige Materie, die in der Zeiteinheit in die Volumeneinheit eintritt $\left(\text{also } \frac{\partial \mu}{\partial t}\right)$, durch die Oberfläche hineingelangt (vgl. die Definition der Divergenz S. 58).

Danach wird:

(236) $$\frac{\partial R^{ik}}{\partial x_k} = c^2 \mu_0 u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} = c^2 \mu_0 \frac{\partial u^i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds} = c^2 \mu_0 \frac{du^i}{ds},$$

und die dynamische Grundgleichung (226) geht unter Berücksichtigung von (230) über in:

(237) $$c^2 \mu_0 \frac{du^i}{ds} = p^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Sie bezieht sich wiederum auf die Volumeneinheit. Ihre Invarianz in bezug auf die Lorentz-Transformation folgt unmittelbar aus der vektoriellen Form.

Nun wollen wir die Bewegung einer Masse betrachten, die wir uns im Schwerpunkt vereinigt denken. Wir haben beide Seiten von (237) über das Volumen der Masse zu integrieren und erhalten so die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes.

[1]) Vgl. auch z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, S. 66. Leipzig 1905.

Es wäre unstatthaft, beide Seiten der Gleichung (237) mit dV, dem Volumenelement, zu multiplizieren; dV ist keine Invariante der Lorentz-Transformation (vgl. S. 43), und der Vektorcharakter einer Gleichung bleibt nur erhalten, wenn die Komponenten mit einer Invarianten multipliziert werden. Eine solche ist aber $\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$.

Wir können also setzen:

$$(238)\qquad c^2\mu_0\frac{du^i}{ds}\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}=c^2dm\frac{du^i}{ds}=p^i\frac{dV}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

wo dm das Massenelement bedeutet. Da die Komponenten von Geschwindigkeit und Beschleunigung für alle Teile unserer Masse dieselben sind, so ergibt die Integration über das ganze Volumen:

$$(239)\qquad c^2m\frac{du_i}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\int p^i dV=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}K^i.$$

$\frac{du^i}{ds}$ sind die Komponenten der Viererbeschleunigung unseres Massenschwerpunktes, K^i die Komponenten der auf die ganze Masse wirkenden Viererkraft.

In Analogie mit der Viererkraft des elektromagnetischen Feldes (S. 87) können wir für die Komponenten von

$$(240)\qquad K^i:\quad \mathfrak{K}_x,\ \mathfrak{K}_y,\ \mathfrak{K}_z,\ \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

schreiben, wo $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$ die drei Komponenten der auf unseren Massenpunkt wirkenden Kraft $\mathfrak{K}$ sind, $\frac{dE}{dt}$ die Zunahme der Energie, d. h. die von $\mathfrak{K}$ in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Wir können auch die Komponenten der Viererbeschleunigung in eine andere Form bringen. Es ist nach (172) und (173):

$$(241)\qquad \frac{du^1}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx_1}{dx_4}\frac{dx_4}{ds}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{q_x}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Entsprechend lautet $\frac{du^2}{dt}$ und $\frac{du^3}{dt}$.

Ferner ist:

$$\frac{du^4}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right)\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{242}$$

Die Gleichung (239) führt deshalb, wenn wir die drei ersten Komponenten sofort wieder zu einer dreidimensionalen vektoriellen Beziehung zusammenfassen, auf:

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right) \tag{243}$$

und:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right). \tag{244}$$

Wir haben damit die Minkowskischen Grundgleichungen für die Dynamik des Massenpunktes erhalten. Entsprechend der Gleichung (202) in der Elektrodynamik (vgl. S. 90) stellt (243) den Satz der Erhaltung des Impulses, (244) den Satz der Erhaltung der Energie dar.

Abweichend von der klassischen Mechanik hat in der Relativitätstheorie der Impuls die Form:

$$\mathfrak{G} = \frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}. \tag{245}$$

Doch kommen wir dem Wert (213) um so näher, je kleiner q ist.

Für die Energie folgt aus (244):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{q^4}{c^4} + \cdots\right) \tag{246}$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}mq^2 + \frac{3}{8}m\frac{q^4}{c^2} + \cdots$$

Für kleine Geschwindigkeiten q stimmt die kinetische Energie bis auf das konstante Glied mc^2 sehr nahe mit dem Wert der klassischen Mechanik $\frac{1}{2}mq^2$ überein. Wir finden also, daß für Geschwindigkeiten von Massenpunkten, die verglichen mit der

Lichtgeschwindigkeit klein sind, die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie in die Newtonsche übergeht. Unser Relativitätsprinzip führt also in der Mechanik zu neuen Grundgesetzen, welche die bisher geltenden als Näherungsgleichungen in sich enthalten, und welche deshalb auch den größten Teil der Vorgänge in der Natur mit wenigstens derselben Schärfe darstellen wie die Newtonschen Grundgleichungen.

Da erst für größere Geschwindigkeiten merkbare Unterschiede zwischen beiden Theorien auftreten, so können erst solche Vorgänge die Berechtigung der Relativitätstheorie erweisen. Der Beobachtung zugänglich sind große Geschwindigkeiten von Massenpunkten bei allen Korpuskularstrahlungen. Diese gestatten also, die Gleichungen (243) und (244) auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Eine Übereinstimmung mit den Beobachtungen findet statt. Doch führt auch hier wieder die Lorentzsche Elektronentheorie in Verbindung mit der Annahme des nichtstarren Elektrons (vgl. S. 43) zu demselben Bewegungsgesetz, so daß also die Strahlungserscheinungen nicht zwischen Elektronen- und Relativitätstheorie (wie auch schon nicht mit Sicherheit zwischen der Annahme eines starren oder unstarren Elektrons) entscheiden können[1].

Eine Lücke vor allem läßt nun die spezielle Relativitätstheorie in der Mechanik. Wollen wir auf besondere Fälle eingehen, so muß die äußere Kraft $\mathfrak{K}$ bekannt sein. Für den wichtigsten Fall, daß $\mathfrak{K}$ die Gravitationskraft ist, fehlt uns in der speziellen Relativitätstheorie die Lösung. Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist ein Fernwirkungsgesetz. Wir müßten aber nach (230) die Komponenten K^i [vgl. (240)] auf Tensorkomponenten S^{ik} zurückführen können; die Wirkung der Gravitation müßte durch ein Nahewirkungsgesetz darstellbar sein.

Erst die allgemeine Relativitätstheorie kann die Lösung dieses Problems bringen. Doch bevor wir uns dieser zuwenden, ziehen wir noch eine letzte Folgerung aus unseren mechanischen Grundgesetzen.

[1]) M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. Bd., 3. Aufl., § 22. Vgl. auch die Literaturangaben bei M. Laue, Das Relativitätsprinzip, sowie z. B. A. H. Bucherer, Messungen an Becquerelstrahlen. Die experimentelle Bestätigung der Lorentz-Einsteinschen Theorie. Physik. Zeitschrift Bd. 9, 1908, S. 755.

Die Gleichung (225) zeigte, daß die sich bewegende Energie einen Impuls besitzt. Der Impuls ist aber in der Mechanik an die sich bewegende träge Masse geknüpft; es muß also der Energie ebenso wie der Masse Trägheit zukommen. In der Tat besteht nicht nur, wie die Gleichung (225) erwarten läßt, ein enger Zusammenhang zwischen Energie und Masse, sondern die Masse, die Materie, selbst erweist sich als eine besondere Form der Energie. Die zwischen Masse und Energie bestehende Beziehung können wir auf verschiedene Weise herleiten. Durch (228) hatten wir den Energie-Impuls-Tensor der bewegten Materie definiert. Betrachten wir denselben Tensor für das System, in welchem die Materie ruht, so lauten [vgl. (173)] seine Komponenten:

$$(247) \qquad R = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2\mu_0 \end{matrix}$$

An derselben Stelle, an der hier $c^2\mu_0$ steht, befindet sich in der Elektrodynamik die Energiedichte W. Zwischen Energiedichte und Massendichte erwarten wir also den Zusammenhang $W = c^2\mu_0$.

Dies wird durch (246) bestätigt.

Die Energie eines ruhenden Körpers wird nach dieser Gleichung nicht null, sondern es ist:

$$(248) \qquad E = c^2 m.$$

Die Energie einer Masse in dem System, in welchem der Körper ruht, ist gleich dieser Masse multipliziert mit c^2 (Satz der Trägheit der Energie).

Eine Änderung der Masse bedingt eine solche der Energie und umgekehrt; die Masse ist also eine besondere Energieform.

Noch anschaulicher werden die Verhältnisse durch folgende Überlegung[1]). Ein abgeschlossenes System ebener Lichtwellen möge sich im Koordinatensystem K unter einem Winkel φ gegen die positive x-Achse fortbewegen. Der Betrag der Energie des sich bewegenden Systems sei E. Transformieren wir die Energie E auf ein Koordinatensystem K', das sich gegen K geradlinig und

[1]) A. Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Annalen der Physik Bd. 17 (1905). Abgedruckt in Lorentz-Einstein-Minkowski, Das Relativitätsprinzip. Leipzig 1915.

gleichförmig mit der Geschwindigkeit v parallel der x-Achse bewegt, so ergibt sich[1]):

$$E' = E\,\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{249}$$

wo $\beta = \frac{v}{c}$ ist.

Nun befinde sich im System K ein Körper ruhend mit der Energie E_0; seine Energie in K' sei E'_0. Er sende unter einem Winkel φ gegen die x-Achse nach entgegengesetzten Richtungen die Energie $\frac{E}{2}$ (im System K gemessen) aus.

Dann ist die Energie nach der Aussendung in K:

$$E_1 = E_0 - \left(\frac{E}{2} + \frac{E}{2}\right) = E_0 - E \tag{250}$$

in K':

$$E'_1 = E'_0 - \left(\frac{E}{2}\,\frac{1-\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{E}{2}\,\frac{1+\beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = E'_0 - \frac{E}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{251}$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt:

$$(E'_1 - E_1) = (E'_0 - E_0) - E\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{252}$$

Der Unterschied der Energien E_0 und E'_0 bzw. E_1 und E'_1 im System K und K' ist aber gerade die kinetische Energie des in K ruhenden Körpers vor und nach der Energieabgabe. Setzen wir:

$$E'_0 - E_0 = K_0, \quad E'_1 - E_1 = K_1, \tag{253}$$

so wird:

$$K_1 = K_0 - E(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \cdots - 1) = K_0 - \frac{E}{c^2}\,\frac{v^2}{2}, \tag{254}$$

wenn wir uns auf die Glieder zweiter Ordnung beschränken. Da die kinetische Energie einer Masse m durch $\frac{1}{2}mv^2$ gegeben ist, so müssen wir aus (253) schließen, daß der Körper vor dem Aussenden die Masse m_0 und nachher die Masse m_1 besitzt, und daß:

$$m_1\,\frac{v^2}{2} = m_0\,\frac{v^2}{2} - \frac{E}{c^2}\,\frac{v^2}{2}, \tag{255}$$

[1]) Die Herleitung der Transformationsgleichung findet sich bei A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. § 8. Annalen der Physik Bd. 17 (1905). Abgedruckt wie bei Anm. auf voriger Seite.

oder:

(256) $$m_1 = m_0 - \frac{E}{c^2}$$

ist.

Gibt ein Körper Energie ab, so verkleinert sich seine Masse um $\frac{E}{c^2}$. Zwischen träger Masse und Energie besteht die Beziehung:

(257) $$m = \frac{E}{c^2}.$$

Die träge Masse eines Körpers ist ein Maß für seinen Energieinhalt. Masse ist zusammengeballte Energie. Materie und elektromagnetisches Feld sind also identisch. Die Energie des elektromagnetischen Feldes existiert, ebenso wie die Materie, als etwas völlig Selbständiges und ist nicht an ein unabhängig davon bestehendes Medium, den Äther der klassischen Physik (vgl. auch S. 18), gebunden. Man kann Materie in Energie transformieren und umgekehrt.

Qualitativ wird dieses Ergebnis durch die Erscheinung des Zerfalls radioaktiver Substanzen bestätigt, doch bedeutet ein Energieverlust von 1 Erg einen Massenverlust von $9 \cdot 10^{-20}$ g, so daß eine quantitative Nachprüfung augenblicklich nicht durchführbar ist.

Aus der Identität von träger Masse und Energie folgt noch: der Satz der Erhaltung der Energie und der Satz der Erhaltung der Materie schmelzen zu einem einzigen zusammen, den wir den Satz der Erhaltung der Energie nennen. Neben ihn tritt als völlig gleichwertig der Satz der Erhaltung des Impulses, die beide zusammen auch die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie bilden werden.

Zweiter Teil.

Allgemeine Relativitätstheorie.

§ 10. Das Äquivalenzprinzip.

Die klassische Mechanik hat bereits gelehrt, daß alle geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen von Massen relative sind; bei allen mechanischen Bewegungsvorgängen bleibt eine gleichförmige Translation unbestimmt.

Die spezielle Relativitätstheorie hat ferner gezeigt, daß auch die elektrischen und optischen Bewegungsvorgänge, soweit gleichförmige Translationen in Frage kommen, als relative aufzufassen sind. Durch die Aufstellung der Lorentz-Transformation gelang zuerst für das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der Nachweis, daß eine Ausdehnung des Relativitätsprinzips der Mechanik auf Elektrizität und Optik möglich ist, wenn nur der Zeitbegriff als ein relativer angenommen wird, und die Euklidische Geometrie sich auf zueinander ruhende Gebilde beschränkt. Eine neue Mechanik war freilich die notwendige Folge der Lorentz-Transformation.

Neben den relativen Bewegungen kennt nun aber die klassische Mechanik absolute. Wenn wir ein Galileisches (absolutes) Koordinatensystem als ein solches definieren, in welchem die Newtonschen Bewegungsgesetze (1) gelten, so sind alle rotierenden Koordinatensysteme davon grundsätzlich verschieden. Im Galileischen Koordinatensystem bewegt sich ein keinen äußeren Kräften unterworfener Massenpunkt geradlinig und gleichförmig weiter, im rotierenden System (auch im gleichförmig rotierenden) wirken Zentrifugalkräfte auf ihn ein. Das Auftreten dieser Kräfte ist an die Rotationsbewegung gegen ein Galileisches Koordinatensystem gebunden; die Rotation ist damit eine absolute Bewe-

gung. Dieser Standpunkt der klassischen Mechanik verzichtet ein für allemal auf eine erkenntnistheoretisch befriedigende Erklärung der Rotation.

Demgegenüber haben bereits unsere einleitenden Ausführungen S. 14 erkennen lassen, daß eine solche Erklärung in den Rahmen des Möglichen tritt, sobald wir unser Relativitätsprinzip zu einem allgemeinen erweitern. Die Rotation ist dann eine Bewegung, die relativ zu irgendwelchen Massen erfolgt. Die Zentrifugalkräfte sind nicht durch die Rotation gegen ein Koordinatensystem, sondern durch eine solche gegen die Massen verursacht und durch letztere bedingt. Ganz allgemein betrachten wir jetzt jede beliebige Bewegung, also die Beschleunigung und Rotation, als eine relative. Eine Masse und eine zu ihr beliebig bewegte z. B. bilden ein System, das selbst irgendeine willkürliche, für immer unbestimmbare Bewegung ausführen kann. Durch diese Auffassung erst gelangen wir in Übereinstimmung mit der unmittelbaren Anschauung, die uns immer nur Bewegungen von Körpern oder Energien relativ zueinander zeigt.

Hieraus ergibt sich sofort eine grundlegende Forderung für die Beschaffenheit der allgemeinen Gesetze der Physik.

Haben wir jetzt in einem Koordinatensystem allgemeine Grundgesetze der physikalischen Naturbeschreibung gefunden, so müssen sie in jedem dazu beliebig bewegten System ihre Form behalten. Wäre dies nicht der Fall, besäßen die Grundgesetze nur in einem Koordinatensystem oder in einer Gruppe von solchen Gültigkeit, so könnten wir durch die Beobachtung feststellen, ob wir uns in einem ausgezeichneten System, oder in („absoluter") Bewegung zu diesem befinden.

Wir unterscheiden in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr zwischen Koordinatensystemen, in bezug auf welche die Grundgesetze gelten oder nicht gelten; ihr analytischer Ausdruck muß bestehen bleiben, wenn das Bezugssystem beliebige, von Stelle zu Stelle verschiedene Bewegungen ausführt. Wir haben damit ein Prinzip gewonnen, das uns bei der Aufstellung aller Grundgesetze leiten muß: die allgemeinen Naturgesetze sind für jedes beliebig bewegte Koordinatensystem invariant. Dies bedeutet eine ungeheuere Vereinfachung der physikalischen Naturbeschreibung.

Stellen wir uns auf den Boden dieses allgemeinen Relativitätsprinzips, so besteht unsere Aufgabe darin, Naturgesetze, welche diese allgemeine Invarianzeigenschaft besitzen, zu gewinnen und mit der Wirklichkeit zu vergleichen. Das Ergebnis dieses Vergleiches wird darüber entscheiden müssen, ob unserem allgemeinen Relativitätsprinzip die Berechtigung zukommt, als grundlegendes Prinzip an die Spitze der Physik zu treten.

Doch ehe wir zur analytischen Behandlung der uns vorgelegten Aufgabe schreiten, können wir der Frage näher treten, ob in Elektrizität und Mechanik überhaupt Hinweise auf die Relativität beliebiger Bewegungen vorhanden sind. Inwiefern dies für Elektrizität und Optik zutrifft, ist bereits S. 85 ausgeführt worden. Noch sinnfälliger tritt dieser Hinweis in der Mechanik zutage.

Wir behandeln ein einfaches Beispiel. Wir betrachten einen fallenden Stein — d. h. einen sich selbst überlassenen Massenpunkt — in einem Zimmer, das unser Koordinatensystem darstellen möge. Der Stein fällt mit einer gewissen Beschleunigung zu Boden. Die Ursache hierfür suchen wir im Gravitationsfeld der Erde, das wir im Bereich des Zimmers als homogen ansehen können. Die Bewegung des Steines erfolgt dabei in bezug auf unser ruhend oder gleichförmig bewegt gedachtes Koordinatensystem, das für die Beschleunigung des Steines nach der Auffassung der klassischen Mechanik ein absolutes ist. In ihm gilt das Newtonsche Bewegungsgesetz; die Schwerkraft ist eine der im Newtonschen Gesetz zulässigen Kräfte und hat mit dem gewählten Koordinatensystem an sich nichts zu tun.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie dagegen ist die Bewegung des Steines in bezug auf das Zimmer eine relative. Die bewegte Masse (Stein) und die Bezugsmasse (Zimmer) müssen miteinander vertauscht werden können, ohne daß die Beschreibung des Bewegungsvorganges sich im Prinzip ändert. Wir müssen sagen können: der Stein bewegt sich mit der Beschleunigung g gegen die Erde, oder die Erde[1]) bewegt sich mit der Beschleunigung g gegen den Stein. Im ersten Fall befindet sich der Stein im ruhenden Gravitationsfeld der Erde. Im zweiten Fall ruht der Stein bzw. befindet sich in gleichförmiger Translation und

[1]) Hinzuzufügen ist strenggenommen: und das gesamte Universum.

das Koordinatensystem besitzt eine Beschleunigung, die der des fallenden Steines im ersten Fall entgegen gerichtet ist; ein Gravitationsfeld ist im zweiten Fall nicht vorhanden.

Hierbei ist zu beachten, daß das Gravitationsfeld der Erde als Ganzes natürlich nicht durch ein beschleunigtes Bezugssystem ersetzt werden kann. Dies gilt vielmehr nur für kleine Teile, soweit das Gravitationsfeld als homogen anzunehmen ist.

Wenn nun beide Systeme, das ruhende System des homogenen Gravitationsfeldes und das beschleunigte, gravitationsfreie für die Beschreibung unseres Vorganges gleichwertig sein sollen, so darf kein Experiment zugunsten der einen oder anderen Auffassung entscheiden. Läßt man in dem Zimmer außer dem Stein noch Körper aus anderen Stoffen und von anderer physikalischer Beschaffenheit „fallen", so müssen alle dieselbe Beschleunigung besitzen.

Das allgemeine Relativitätsprinzip fordert also die Gleichheit der trägen und der schweren Masse. Denn die Anziehungskraft der Erde an irgendeiner Stelle ist einmal gleich dem Produkt aus träger Masse m_t und Beschleunigung $\frac{d^2r}{dt^2}$ und ebenso gleich dem Produkt aus schwerer Masse m_s und Intensität des Gravitationsfeldes g. Daraus folgt:

(258) $$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{m_s}{m_t}g.$$

Ist die Beschleunigung an irgendeiner Stelle für alle Massen dieselbe, so folgt $m_s = m_t$.

Die Gleichheit der trägen und schweren Masse ist nun aber eine Beobachtungstatsache von außerordentlich großer Zuverlässigkeit, besonders seitdem R. v. Eötvös seine Messungen mit der Torsionswage durchgeführt hat[1]). Die allgemeine Relativitätstheorie stützt sich demnach in ihrer grundlegenden Forderung auf eine völlig sichergestellte Erscheinung der Mechanik. Während bisher die Gleichheit der trägen und schweren Masse als eine zufällige Eigenschaft der Körper galt, die keiner weiteren Erklärung bedurfte, vermag nun die allgemeine Relativitätstheorie die Erscheinung in befriedigender Weise zu deuten.

[1]) Vgl. hierüber z. B. die zusammenfassenden Aufsätze von D. Pekár in „Die Naturwissenschaften" 7. Jahrg. Berlin 1919.

Ob wir eine Masse als träge oder schwer auffassen, hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab. Kehren wir noch einmal zum Experiment des fallenden Steines zurück. Das eine Mal fällt er als schwere Masse unter der Einwirkung unseres Gravitationsfeldes. Das andere Mal fehlt das Gravitationsfeld — wir sind im Galileischen Bezugsraum — und der Stein bewegt sich geradlinig und gleichförmig als träge Masse. Die Beschleunigung kommt nun dadurch zustande, daß wir die Bewegung auf ein beschleunigtes System beziehen. Je nach der Wahl des Koordinatensystems ist die Masse träge oder schwer.

Anschaulicher treten die Verhältnisse wohl noch bei folgendem Gedankenexperiment hervor. In einem von irgendwelchen äußeren Kräften freien (Galileischen) Bezugssystem bewege sich ein von der Außenwelt abgeschlossener Raum, ein Kasten, mit gleichförmiger Beschleunigung in der Richtung nach der Decke. Dann werden in diesem Raum alle sich selbst überlassenen Körper mit derselben Beschleunigung zu Boden „fallen". Der Beobachter im Zimmer wird eine Bewegung der Körper wahrnehmen, die er vollständig als eine solche von schweren Massen im Gravitationsfeld deuten kann und sogar mit Recht deutet, wenn er von seiner eigenen Bewegung nichts weiß. Ein außerhalb des Zimmers im Galileischen System ruhender Beobachter dagegen nimmt die Bewegung als die von trägen Massen wahr.

Jede beobachtete, gleichförmige Beschleunigung eines sich selbst überlassenen Massenpunktes kann also entweder als beschleunigte Bewegung einer schweren Masse in einem ruhenden homogenen Gravitationsfeld oder als gleichförmige Bewegung einer trägen Masse in einem beschleunigten, gravitationsfreien Koordinatensystem beschrieben werden (Einsteinsches Äquivalenzprinzip[1])). Das Gravitationsfeld existiert nicht als etwas Absolutes, sondern ist an das Koordinatensystem gebunden, ebenso wie wir das früher für die kinetische Energie erkannt hatten (vgl. S. 9). Vom Gravitationsfeld an einer Stelle der Erdoberfläche zu sprechen, hat nur

[1]) Vgl. hierzu und für das Folgende: A. Einstein, Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Annalen der Physik (4) Bd. 35, 1911, S. 898. Abdruck in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski. Das Relativitätsprinzip, 3. Aufl., Leipzig 1920.

Sinn in bezug auf ein mit ihr fest verbundenes, ruhendes Koordinatensystem.

Eine Bemerkung sei hier eingefügt. Durch eine besondere Koordinatenwahl können wir auch die Beschleunigung ganz zum Verschwinden bringen. Befinden wir uns in einem homogenen Gravitationsfeld und beschreiben die Bewegung von irgendwelchen Massen in bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Beschleunigung nach Größe und Richtung mit derjenigen der Schwere zusammenfällt, so geht diese Bewegung ebenso vor sich, als ob das Koordinatensystem ruht, und ein Gravitationsfeld nicht vorhanden ist. Für jede Koordinatenwahl muß jedoch, wie wir später noch sehen, die Bewegung von sich selbst überlassenen Massenpunkten durch dasselbe invariante Grundgesetz dargestellt werden.

Zufolge den S. 103 gegebenen Ausführungen kommt nun der Energie ebenso wie der Masse Trägheit zu. Nach dem Äquivalenzprinzip ist demnach bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems auch jede Art von Energie (z. B. die Energie des elektromagnetischen Feldes) schwer; jede Art von Energie muß also selbst eine Gravitationswirkung ausüben (Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung). Materie und Energie verhalten sich also völlig gleich. Die Materie ist auch in der allgemeinen Relativitätstheorie als eine besondere Erscheinungsform der Energie zu deuten.

Wir sind dadurch zu einer Erweiterung des Einsteinschen Äquivalenzprinzips gekommen: für die Beschreibung aller Naturvorgänge ist ein ruhendes homogenes Gravitationsfeld einem gleichförmig beschleunigten, gravitationsfreien Koordinatensystem gleichwertig, dessen Beschleunigung derjenigen der Gravitation in der Größe gleich, in der Richtung entgegengesetzt gleich ist.

Betrachten wir also irgendeinen Vorgang mechanischer oder elektrischer Natur in einem gleichförmig beschleunigten Koordinatensystem, das einem von Gravitation freien Raum angehört, so muß sich dieser nach dem Äquivalenzprinzip in einem ruhenden homogenen Gravitationsfeld in genau derselben Weise abspielen. Ein geworfener Stein muß im Gravitationsfeld eine gekrümmte Bahn beschreiben. Ebenso aber auch ein Lichtstrahl: Massen wirken auf die Energie der Lichtes ebenso gravitierend wie auf

den geworfenen Stein. Die Lichtgeschwindigkeit ist im Gravitationsfeld nicht konstant. Es ist hier schon zu erkennen, daß das Äquivalenzprinzip schließlich zu einer Theorie der Gravitation führen wird.

Zunächst gelangen wir zu Folgerungen, die der Nachprüfung durch die Beobachtung unmittelbar zugänglich sind.

Wir behandeln folgenden Fall. Von einem im Anfangspunkt eines Koordinatensystems K liegenden Punkt S_1 (siehe Fig. 2) gehe Licht längs der positiven z-Achse nach dem in der Entfernung h liegenden Punkt S_2. Das Koordinatensystem K möge sich mit der Beschleunigung γ in der Richtung der positiven z-Achse bewegen. Das Licht hat in S_1 die Schwingungsdauer ν_1. Beginnt die Bewegung von K im Augenblick des Abgangs unseres Lichtstrahles aus S_1, so wird bei seiner Ankunft im Punkt S_2 dieser eine Geschwindigkeit $v = \gamma \cdot t$ besitzen, wo t die Zeit ist, die das Licht von S_1 nach S_2 brauchte. Nach dem Dopplerschen Prinzip[1]) ist die in S_2 beobachtete Schwingungsdauer ν_2 gegeben durch:

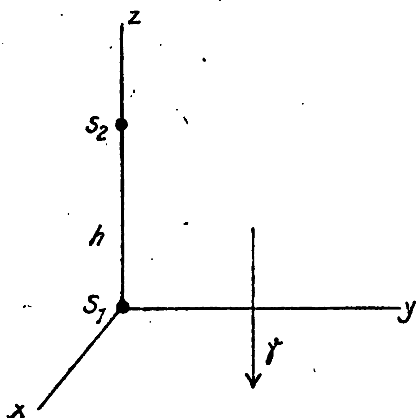


Fig. 2.

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{259}$$

Machen wir die Annahme, die nur näherungsweise zutrifft (aber, wie wir noch sehen werden, mit einer für unsere Betrachtungen hinreichenden Genauigkeit), daß auch im beschleunigten System K die Lichtgeschwindigkeit den konstanten Wert c besitzt, so ist $t = \frac{h}{c}$, also die Schwingungsdauer:

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 - \frac{h\gamma}{c^2}\right). \tag{260}$$

Die Schwingungsdauer erscheint in S_2 vergrößert.

[1]) Siehe z. B. O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. I. Bd., S. 202.

Unser beschleunigtes Koordinatensystem K können wir nun nach dem Äquivalenzprinzip durch ein ruhendes ersetzen unter der Annahme der Existenz eines Gravitationsfeldes mit der konstanten Schwerebeschleunigung γ in Richtung der negativen z-Achse. Gehen wir nun in der Richtung der positiven z-Achse um dz weiter, so wächst das Gravitationspotential[1]) um den Betrag:

(261) $$d\Phi = \gamma dz;$$

$h\gamma$ ist demnach der Betrag, um welchen das Gravitationspotential in S_2 größer ist als in S_1. Setzen wir die Potentialdifferenz zwischen S_2 und S_1 gleich Φ, so lautet (260):

(262) $$\nu_1 = \nu_2\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Unser Äquivalenzprinzip lehrt also: geht im homogenen Gravitationsfeld Licht von einer Stelle kleineren nach einer solchen höheren Potentials, so erscheint seine Schwingungsdauer ν_1 um den Betrag $\nu_2 \frac{\Phi}{c^2}$ (wofür wir auch $\nu_1 \frac{\Phi}{c^2}$ setzen können) vergrößert und zwar in erster Näherung wegen der Voraussetzung konstanter Lichtgeschwindigkeit in K.

Machen wir die Annahme, daß dasselbe Gesetz nicht nur für homogene, sondern für beliebige Gravitationsfelder gilt[2]), so muß Licht, das von Stellen niedrigeren Potentials, also von größeren Massen, zu uns gelangt, im Spektrum eine Linienverschiebung nach Rot zeigen, wenn wir es mit einer Lichtquelle derselben Beschaffenheit beim Beobachter vergleichen. Im umgekehrten Fall findet eine Verschiebung nach Violett statt.

Es sind nun aber schon sehr große Potentialdifferenzen Φ notwendig, damit der Betrag der Linienverschiebung meßbar wird. Für das Licht, das von der Sonne zur Erde gelangt, hat $\frac{\Phi}{c^2}$ den Wert[3]) 2×10^{-6}; hieraus folgt, da $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} = 2 \times 10^{-6}$, eine Linien-

[1]) Das Gravitationspotential ist eine wesentlich negative Größe; das wachsende Gravitationspotential wird absolut kleiner.

[2]) Vgl. hierzu auch die Ausführungen in § 14, sowie den Vortrag M. v. Laues, Über neue Versuche zur Optik bewegter Körper, auf der Naturforscherversammlung Bad Nauheim 1920.

[3]) Vgl. u. a. K. Schwarzschild, Über die Verschiebungen der Bande bei 3883 A. E. im Sonnenspektrum. Sitzber. d. Berl. Ak. d. W. 1914, S. 1201.

verschiebung von 0,008 A. E. bei $\lambda = 400 \mu\mu$, was einem Doppler-Effekt von etwa 0,6 km in der Sekunde entsprechen würde. Aus der Kleinheit der Verschiebung erkennt man auch, daß es berechtigt ist, sich bei der Berechnung der Veränderung der Schwingungsdauer auf ein Näherungsverfahren zu beschränken.

Der Betrag der Verschiebung ist noch meßbar, doch haben größere Reihen von Schwarzschild, Evershed und besonders St. John[1]) keine positiven Ergebnisse gebracht. Die Vorgänge innerhalb der Sonnenatmosphäre sind außerordentlich verwickelt, Druck- und Temperaturverhältnisse, unter denen die Sonnengase leuchten, sind nicht ohne weiteres im Laboratorium nachzubilden. Die wesentlichste Bedingung für den Nachweis der Linienverschiebungen, nämlich die, daß die Vergleichslichtquelle von genau derselben Beschaffenheit sei, wie diejenige, von der das Licht ausgeht, ist nur sehr schwer und nur angenähert zu erfüllen. Neuerdings haben L. Grebe und A. Bachem[2]) zeigen können, daß wahrscheinlich die im Sonnenspektrum gemessenen Linien teilweise unsymmetrisch sind, und unter Berücksichtigung dieser Unsymmetrie ergeben sich für die Rotverschiebung Werte, welche mit den von der Relativitätstheorie verlangten nahe übereinstimmen. Doch sind hier noch eingehende weitere Untersuchungen notwendig, ehe ein abschließendes Urteil möglich ist.

Auch die Masse der Fixsterne ist im allgemeinen groß genug, um meßbare Linienverschiebungen hervorzurufen. Hier sind aber die Verhältnisse noch dadurch verwickelter als bei der Sonne, daß, außer durch die Vorgänge in der Atmosphäre selbst, auch durch die unbekannte Bewegung der Sterne im Weltall Linienverschiebungen hervorgerufen werden. Gewisse Spektraltypen (*B*-, *K*- und *M*-Sterne) lassen nun systematische Verschiebungen erkennen, die auf große Massen dieser Sterne hinzudeuten scheinen,

---

[1]) Ch. E. St. John, The principle of generalized relativity and the displacement of Frauenhofer lines toward the red. Astrophys. Journal. Vol. 46. 1917, S. 249.

[2]) L. Grebe und A. Bachem, Über den Einstein-Effekt im Gravitationsfeld der Sonne. Ber. d. Dtsch. Phys. Ges. 1919, S. 454. Ferner: Über die Einsteinverschiebung im Gravitationsfeld der Sonne. Zeitschr. f. Physik Bd. 1, S. 51, 1920; sowie der Vortrag L. Grebes auf der Naturforscherversammlung Bad Nauheim 1920.

freilich sind die hierbei auftauchenden Fragen noch nicht geklärt[1]).

Hervorzuheben ist aber eine eigentümliche Erscheinung, auf die E. Freundlich[2]) hingewiesen hat. Sind Fixsterne mit Nebelmassen räumlich verbunden, so daß sie also eine gemeinsame Bewegung im Weltenraum besitzen, und beobachtet man das Licht, das von beiden ausgeht, so ist zu erwarten, daß das Sternspektrum wegen der erheblich größeren Massenanhäufung in den Sternen eine Rotverschiebung gegen die Linien des Nebelspektrums zeigt. Eine Nachprüfung ist einmal bei den Sternen (meist vom Typus *B*) möglich gewesen, die sehr wahrscheinlich organisch zum Orionnebel gehören. Sie besitzen im Durchschnitt gegen den Orionnebel eine Rotverschiebung, die als Dopplereffekt gedeutet + 6,0 km beträgt.

Ferner gibt es eine Reihe von Sternen (wiederum meist vom Typus *B*) mit Kalziumlinien, welche ein völlig anderes Aussehen als die übrigen Linien des Spektrums zeigen. Wahrscheinlich ist es, daß diese Sterne von Kalziumwolken umgeben sind. Auch hier zeigt das Sternspektrum eine Rotverschiebung, und zwar im Mittel um + 6,3 km, gegen die Kalzium-Nebellinien. Der Betrag ist in beiden Fällen größer, als ihn die *B*-Sterne im Durchschnitt ergeben (+ 4,3 km); doch spricht dies in keiner Weise gegen die Auffassung, daß die Verschiebungen einen Gravitationseffekt darstellen. Vielmehr ist diese Deutung einfacher als manche andere, die man der beobachteten Erscheinung sonst geben könnte. Die Massen der Sterne von Spektraltypus *B* wären allerdings erheblich größer, als man bisher angenommen hat.

Wenn die Erklärung zutrifft, welche die allgemeine Relativitätstheorie für die systematische Rotverschiebung in den Sternspektren gibt, so stehen wir vor Gesetzmäßigkeiten, die für die Astronomie

[1]) Von neuerer Literatur vgl. E. Freundlich, Zur Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie. „Die Naturwissenschaften“, 7. Jahrg., 1919, S. 629. E. Freundlich, Über die Gravitationsverschiebung der Spektrallinien bei Fixsternen. II. Mitt. Phys. Zeitschr., 20. Jahrg., 1919, S. 561. W. de Sitter, On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences (I. Paper). Monthly Notices of the Royal Astronom. Society. Vol. 76, 1916, S. 719. H. Ludendorff, Weitere Untersuchungen über die Massen der spektroskopischen Doppelsterne. Astr. Nachr. Bd. 211, 1920, S. 105.

[2]) Vgl. die beiden vorhergehend zitierten Arbeiten.

von außerordentlicher Tragweite sind. Das Gravitationspotential an der Oberfläche eines Sternes, das für die Rotverschiebung maßgebend ist, lautet: $\Phi = \frac{m}{r}$ (m = Sternmasse, r = Sternradius); andererseits ist r proportional $\left(\frac{m}{d}\right)^{1/3}$ (d = Sterndichte). Es folgt also, wenn wir Linienverschiebungen auf Sonne und Stern miteinander vergleichen, d. h. durch Spektralmessungen $\Phi_* : \Phi_\odot$ bestimmen[1]):

$$(263) \qquad \frac{m_*}{m_\odot} = \left(\frac{\Phi_*}{\Phi_\odot}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{d_\odot}{d_*}\right)^{1/2}.$$

Die Rotverschiebung erlaubt zwar nicht, die Sternmasse selbst, wohl aber $m_* \sqrt{d_*}$ zu ermitteln.

Nun ist die absolute Helligkeit eines Sternes proportional der Größe $O \cdot T^4$, wo O die Oberfläche, T die absolute Temperatur des Sternes bedeutet; oder es ist:

$$\text{absolut. Helligkeit prop.} \left(\frac{m}{d}\right)^{2/3} T^4.$$

Können wir aus dem Charakter des Sternspektrums auf Dichte und absolute Temperatur des Sternes schließen, was immerhin mit einer gewissen Sicherheit möglich ist, so gibt die Rotverschiebung in Verbindung mit der scheinbaren Helligkeit an der Sphäre die Parallaxe des Fixsterns. Wenn es also gelingt, bei einem Fixstern die Gravitationsverschiebung im Spektrum von den übrigen Einflüssen zu trennen, durch welche ebenfalls Linienverschiebungen hervorgerufen werden können, so besteht ein gangbarer Weg zur Ermittlung der Entfernung des Sternes. Es könnten damit spektroskopische Beobachtungen dem Astronomen das wesentlichste Element liefern, das er zur Untersuchung der Bewegungsvorgänge im Fixsternsystem braucht, und das ihm andere Methoden nur unvollkommen oder gar nicht geben können. Der Versuch, den E. Freundlich[2]) mit den Sternen der Orion-Nebelgruppe unternommen hat, führte zu einem Resultat, das mit den Ergebnissen anderer Methoden übereinstimmt.

Die aus dem Äquivalenzprinzip sich ergebende Gleichung (262) beschränkt sich nun nicht auf die Schwingungsdauer leuchtender

[1]) H. Seeliger, Über die Gravitationswirkung auf die Spektrallinien. Astr. Nachr. Bd. 202. 1916. S. 83.

[2]) Vgl. Anm. 1) S. 115.

Atome. Jedes schwingende Atom ist eine Uhr (vgl. S. 47). Wir können also unsere Beziehung (262) auch in folgender Weise interpretieren. Hat man zwei völlig gleiche Uhren A und B (die an derselben Stelle in ihrem Gang übereinstimmen) und bringt man die eine, A, an eine Stelle kleineren Gravitationspotentials, d. h. in die Nähe großer Massen, so geht sie verglichen mit B langsamer, an Stellen höheren Gravitationspotentials dagegen rascher, und zwar geht sie verglichen mit B um den Betrag $\Delta\tau_2 \frac{\Phi}{c^2}$ nach oder vor, wenn $\Delta\tau_2$ die Zeit ist, welche die Uhr B zurückgelegt hat, und Φ die Potentialdifferenz der Stellen B minus A bedeutet.

Dieser Satz gibt uns die Erklärung für das in der speziellen Relativitätstheorie (S. 45) auftretende scheinbare Uhrenparadoxon[1]).

Wir hatten folgenden Vorgang betrachtet. Von zwei Uhren A und B, die zuerst im Anfangspunkt eines Galileischen Bezugssystems ruhen, bewegt sich die eine, B, mit konstanter Geschwindigkeit v längs der positiven x-Achse von A weg und wieder dahin zurück. Die Geschwindigkeitsänderungen sind durch Kräfte verursacht, die jeweils kurze Zeit auf B wirken. Diese Kräfte mögen auf den Gang der Uhr B ohne Einfluß sein; es war dann:

$$(264) \qquad \Delta t_1 = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t_2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right),$$

oder die Uhr B ist bei ihrer Rückkehr gegen A um den Betrag $\frac{1}{2} \Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$ in erster Näherung zurückgeblieben.

Die Bewegung beider Uhren ist nun aber eine relative; wir können bei der Beschreibung auch A als bewegt und B als ruhend annehmen. Doch wurde bereits (vgl. S. 45) hervorgehoben, daß, wenn die Kräfte statt auf B auf A wirken, wir physikalisch einen anderen Vorgang erhalten. Wir müssen vielmehr den ersten Vorgang, wenn wir B als ruhend ansehen, und dieselben Kräfte wie vorher auf B wirken, folgendermaßen beschreiben.

A und B ruhen anfangs im Koordinatenanfangspunkt unseres

[1]) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. „Die Naturwissenschaften", 6. Jahrg., 1918, S. 697.

Systems. Es entsteht kurze Zeit ein homogenes Gravitationsfeld[1]) in Richtung der negativen x-Achse; beide Uhren erfahren dieselbe Beschleunigung; auf B wirkt aber eine Kraft, welche die Uhr an ihrer Stelle festhält. A bewegt sich nach dem Verschwinden des Gravitationsfeldes mit konstanter Geschwindigkeit v in der Richtung der negativen x-Achse, bis sie den Abstand h von B erreicht hat. Es entsteht dann kurze Zeit ein homogenes Gravitationsfeld in Richtung der positiven x-Achse; wieder hält eine Kraft B fest. Das Gravitationsfeld verschwindet, sobald A die Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x-Achse besitzt. Ein entsprechendes Gravitationsfeld und eine erneut auf B wirkende Kraft stellt schließlich wieder den ursprünglichen Zustand her.

Während der gleichförmigen Bewegung bleibt die Uhr A gegen B zurück; setzen wir jetzt:

$$(265)\qquad \Delta t_1 = \Delta t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t_2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right),$$

so bleibt A um $\frac{1}{2}\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$ (in erster Näherung) zurück. Nun befindet sich A und B zeitweise in einem homogenen Gravitationsfeld (mit der Beschleunigung γ). Am Anfang und Ende der Bewegung ist das Potential für beide Uhren dasselbe, bei der Umkehr von A aber findet sich letztere an einer Stelle, an welcher das Gravitationspotential um $h\gamma$ größer ist. Die Uhr geht also um $\Delta\tau_2 \cdot \frac{h\gamma}{c^2}$ vor, wo $\Delta\tau_2$ die Zeit (gemessen mit B) bedeutet, während welcher das zweite Gravitationsfeld besteht. Es ist aber:

$$\Delta\tau_2 = \frac{2v}{\gamma};\quad h = \tfrac{1}{2}\Delta t_2 v.$$

Die Uhr A geht während des Übergangs von der negativen in die positive Richtung um $\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$ vor.

Im Verlauf des ganzen Vorgangs geht demnach A um $\frac{1}{2}\Delta t_2 \frac{v^2}{c^2}$ (in erster Näherung) vor.

[1]) Näheres über das entstehende Gravitationsfeld siehe § 14. Dort wird sich auch zeigen, daß die hier gegebene Darstellung eine Näherung bedeutet. Die strenge Durchführung würde aber wegen der allgemeinen Invarianz der Grundgleichungen zu demselben Resultat führen.

Es bleibt also bei unserem Vorgang *B* gegen *A* im Ganzen um denselben Betrag zurück, gleichgültig ob wir *A* oder *B* als ruhend annehmen, genau wie es die allgemeine Relativität aller Bewegungsvorgänge verlangt.

Wir sind jetzt auch in der Lage, das bei einer gleichförmigen Rotation auftretende Zentrifugalfeld in Übereinstimmung mit unserem Äquivalenzprinzip als Gravitationsfeld zu deuten (vgl. S. 107). Jeder in einem rotierenden Koordinatensystem sich selbst überlassene Massenpunkt (auf den also keine Gravitationskräfte wirken) erfährt in bezug auf dieses System eine gewisse Beschleunigung, die an irgendeiner Stelle allein von der Rotationsgeschwindigkeit abhängt, d. h. für alle Massen dieselbe ist. Der Punkt bewegt sich als träge Masse, die Beschleunigung rührt von der Bewegung des Koordinatensystems her. Von diesem Gesichtspunkt aus allein hat die klassische Mechanik die Erscheinung des Zentrifugalfeldes, das Auftreten der Zentrifugalkräfte gedeutet.

Infolge der Gleichheit der trägen und schweren Masse entspricht jedoch die Bewegung im Zentrifugalfeld an einer bestimmten Stelle völlig derjenigen im Gravitationsfeld, so daß es z. B. an einer Stelle der Erdoberfläche nicht möglich ist, Gravitationsbeschleunigung und Zentrifugalbeschleunigung zu trennen. Im Ganzen sind allerdings beide Felder verschieden; das Zentrifugalfeld nimmt nach außen hin zu.

Betrachten wir also das rotierende Koordinatensystem nun als ruhend, so befindet sich der Massenpunkt in einem Gravitationsfeld. Da die allgemeine Relativitätstheorie nur eine Rotation gegen Massen kennt, die sich außerhalb des rotierenden Bezugskörpers befinden, so ist anzunehmen, daß das bei der zweiten Wahl des Koordinatensystems auftretende Gravitationsfeld auf das Vorhandensein jener Massen („ferne Massen") zurückzuführen ist. In welcher Weise diese Gravitationswirkung zustande kommt, kann hier noch nicht erörtert werden[1].

[1]) Vgl. § 14. Von einer trägen Masse in dem hier gebrauchten Sinn kann allerdings in der Relativitätstheorie in ihrer allgemeinsten Form nicht mehr gesprochen werden. Da aber auch dort eine Masse, der wir eine Anfangsgeschwindigkeit erteilen, sich in einem mit dem Fixsternhimmel fest verbundenen Koordinatensystem (in ihm ruhen die Sterne im Durch-

Wir können schließlich das Ergebnis unserer bisherigen Untersuchungen dahin zusammenfassen: das aus dem allgemeinen Relativitätsprinzip unmittelbar hervorgehende Äquivalenzprinzip steht nirgends in Widerspruch mit der Erfahrung[1]); es vermag vielmehr eine Reihe von Erscheinungen — vor allem die Gleichheit der trägen und schweren Masse — zu deuten, für welche bisher eine Erklärung gar nicht oder nur unvollkommen möglich war. Hierauf gestützt können wir das Problem der mathematischen Behandlung unseres allgemeinen Relativitätsprinzips in Angriff nehmen.

§ 11. Die Zusammenhänge der allgemeinen Relativitätstheorie mit der Riemannschen Geometrie.

Wir fordern die Invarianz der allgemeinen Naturgesetze in bezug auf beliebig zueinander bewegte Koordinatensysteme. Darin ist nach den vorhergehenden Ausführungen die Forderung der Invarianz für beliebige Gravitationsfelder enthalten. Die spezielle Relativitätstheorie zeigte, daß bei Bezugssystemen, die sich relativ zueinander in gleichförmiger Translation befinden, die Zeit an das einzelne System gebunden ist, und die Invarianz in bezug auf diese Systeme auf eine solche gegen eine lineare Transformation in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum besonderer Art zurückgeführt werden kann. Wir werden anzunehmen haben, daß auch für beliebig zueinander bewegte, willkürliche Systeme die Zeit eine relative, vom System abhängige ist, daß wir es also in der allgemeinen Relativitätstheorie wieder mit einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, jedoch von allgemeinerer Natur zu tun haben.

In welcher Weise die Koordinaten aufzufassen sind, veranschaulichen wir uns zuerst an einem Beispiel. Wir denken uns einen von irgendwelchen Gravitationsfeldern freien Raum und führen in ihm ein Galileisches Koordinatensystem K ein. In ihm gilt für ruhende geometrische Gebilde die Euklidische Geometrie, ruhende Uhren geben die Zeit des Systems an.

schnitt) in großer Entfernung von den übrigen Massen geradlinig und gleichförmig bewegt, ebenso wie hier die träge Masse, so bleibt die hier gegebene Erklärung bestehen.

[1]) Der endgültige Nachweis der Rotverschiebung der Spektrallinien fehlt freilich noch.

Bestimmen wir in diesem System die Koordinaten eines Raumpunktes, so messen wir mittels starrer endlicher (gerader) Maßstäbe durch Aneinanderlegen die Länge der Projektionen dieses Punktes auf irgendwelche festgelegten Achsen. Hierbei hat ein Maßstab für einen Beobachter an jeder Stelle dieselbe unveränderte Länge. Bringen wir einen Stab von der Länge s an irgendeine Stelle unseres Raumes und führen ein Cartesisches Koordinatensystem ein, so besteht für jede Lage von s die Beziehung:

(266) $$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

wo x_1, y_1, ... die Koordinaten der Endpunkte von s sind. Hat der Stab die unendlich kleine Länge ds, so ist an jeder Stelle des Raumes:

(266′) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wobei die Differentiale dx, dy, dz sich auf irgendein Cartesisches Koordinatensystem beziehen. Durch Summation von (266′) kommen wir wieder auf (266) zurück.

Einen solchen Raum nun, in welchem ein starrer, endlicher Maßstab überall dieselbe Länge hat, und in welchem die sich daraus ergebenden geometrischen Eigenschaften (in ihrer Gesamtheit bezeichnen wir sie als Euklidische Geometrie) gelten, nennen wir ein dreidimensionales Euklidisches Kontinuum. Im gegenteiligen Fall sprechen wir von einem Nichteuklidischen Kontinuum.

Bei irgendwelchen physikalischen Messungen haben wir bisher stets bewußt oder unbewußt ein Euklidisches Kontinuum zugrunde gelegt, seine geometrischen Eigenschaften als die Eigenschaften des Raumes schlechthin angesehen. Ebenso wie die räumlichen Koordinaten messen wir die zeitliche durch Aneinanderreihen einer Zeiteinheit, die von einer überall gleichmäßig gehenden Uhr geliefert wird. Auch die Zeit besitzt danach Euklidische Struktur.

Zufolge der speziellen Relativitätstheorie bleibt diese Auffassung von Raum und Zeit bestehen, wenn unsere Messungen sich innerhalb eines geradlinig und gleichförmig bewegten Systems auf alle in diesem ruhenden Gebilde erstrecken.

Jetzt möge aber ein zweites System K' gegen K gleichförmig rotieren. Wir wollen die Rotationsachse als z-Achse wählen und uns auf die xy-Ebene beschränken. Wir betrachten diese als

rotierende Kreisscheibe, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt von K und K' ist. Gleichlange kleine Strecken, die in verschiedener Entfernung vom Scheibenmittelpunkt senkrecht zum Radius aufgetragen sind, werden nun zufolge der speziellen Relativitätstheorie, von K aus gemessen, in verschiedener Weise verkürzt erscheinen, während dieselben Strecken, längs des Radius aufgetragen, ihre Länge behalten. Messen wir den Umfang eines konzentrischen Kreises unserer Scheibe mittels eines in K ruhenden unendlich kleinen Maßstabes, so erhalten wir $2r\pi$; mittels eines relativ zu K' ruhenden Maßstabes dagegen erhalten wir einen Wert, der größer als $2r\pi$ ist, um so größer, je weiter außen wir den Umfang messen. Von K aus beurteilt, also für einen im Scheibenmittelpunkt ruhenden Beobachter, der zugleich in K' ruht, gilt auf der Scheibe die Euklidische Geometrie nicht. Zeichnet der Beobachter im Mittelpunkt der Scheibe z. B. in ein Cartesisches Koordinatensystem von unendlich kleiner Ausdehnung eine geometrische Figur und legt das Ganze an irgendeine andere Stelle der Scheibe, so erscheint ihm Netz und Figur verzerrt. Es ist also nicht mehr möglich, die Koordinaten eines Punktes der rotierenden Scheibe in der für das Euklidische Kontinuum angegebenen Weise festzulegen. Räumliche Koordinatendifferenzen können nicht mit einem im ganzen System gültigen Maßstab d. h. durch Aneinanderlegen eines unveränderlichen Maßstabes gemessen werden. Wir befinden uns vielmehr in einem Nichteuklidischen Kontinuum, in welchem wir gezwungen sind, die Lage der Punkte durch Koordinaten anzugeben, die wir krummlinige bzw. Gaußsche Koordinaten oder Parameter nennen (vgl. die S. 124 folgenden Ausführungen, sowie S. 73).

Dieselben Verhältnisse wie bei den räumlichen Koordinaten finden wir bei der Zeit. Uhren, die an verschiedenen Stellen der rotierenden Scheibe aufgestellt und mit einer im Mittelpunkt ruhenden Uhr verglichen werden, gehen um so langsamer, je weiter außen sie sich befinden. In K' ruhende Uhren gehen nicht synchron; es gibt in diesem System keine einheitliche Zeit, deren Einheiten sich etwa auf einer Achse senkrecht zu den räumlichen Achsen als gleichlange Intervalle auftragen ließen. Zeitliche Differenzen können nicht mit einer im ganzen System gültigen Normaluhr bestimmt werden. Auch die Zeit tritt als Parameter auf.

Was für das rotierende Koordinatensystem als speziellen Fall galt, bleibt für beliebig bewegte Koordinatensysteme bestehen. **Denken** wir uns an irgendeiner Stelle einen Beobachter, so werden relativ zu ihm die übrigen Punkte des Systems in kleinen Zeiträumen gleichförmige Translationen ausführen, die von Punkt zu Punkt verschieden sind. Von Punkt zu Punkt wird ein Einheitsmaßstab für ihn eine andere Länge besitzen, eine Uhr einen anderen Gang.

Da jedes beliebig bewegte Koordinatensystem, sei es beschleunigt oder rotierend, bei entsprechender Transformation zu Gravitationsfeldern führt, die im allgemeinsten Fall von Punkt zu Punkt variieren (der rotierenden Scheibe entspricht ein rotationssymmetrisches Gravitationsfeld, das von innen nach außen zunimmt), so gelten diese Verhältnisse auch für beliebige Gravitationsfelder. Die Längen- und Zeiteinheiten sind von einem Punkt aus betrachtet an verschiedenen Stellen des Gravitationsfeldes verschieden.

Das Raum-Zeit-Kontinuum der allgemeinen Relativitätstheorie ist also ein Nichteuklidisches Kontinuum der allgemeinsten Art, die Raum-Zeit-Punkte sind durch Parameter festzulegen. Nur in dem einen Fall, bei welchem beschleunigte oder rotierende Koordinatensysteme, also Gravitationsfelder, nicht vorhanden sind, ist der Raum ein Euklidisches Kontinuum, und die Zeit auf einer imaginären Achse senkrecht zum Raum aufzutragen; räumliche und zeitliche Größen sind in der zuerst angegebenen Weise meßbar, wenn auch unser vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum sich hier schon als ein Nichteuklidisches spezieller Art, mit dem Euklidischen enge verwandtes, darstellt.

Die Einführung der Parameter in die allgemeine Relativitätstheorie zeigt nun bereits an dieser Stelle deren engen Zusammenhang mit der allgemeinen Riemannschen Geometrie[1]), wie sie durch die Antrittsvorlesung B. Riemanns „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen"[2]) begründet worden ist.

[1]) Doch ist die allgemeine Relativitätstheorie unabhängig von der Riemannschen Geometrie entstanden (vgl. E. Freundlich, „Die Naturwissenschaften" 8. Jahrg. 1920. S. 235).

[2]) B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke. Nr. XIII. Auch neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl. Berlin 1919.

Wir müssen uns nun etwas eingehender mit der **Parameterdarstellung** der geometrischen Gebilde beschäftigen. Der besseren Anschaulichkeit halber beschränken wir uns auf **zwei Dimensionen.**

Schon in der Ebene kennen wir neben den rechtwinkligen (Cartesischen) Koordinaten auch Parameter. Durch die Transformation:

(267) $$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi$$

führen wir z. B. Cartesische Koordinaten in Polarkoordinaten über; r und φ sind Parameter, durch welche die Lage eines Punktes in der Ebene bestimmt ist. Solange wir die Annahme machen, daß ein beliebiger endlicher Maßstab überall dieselbe Länge hat, können wir immer wieder auf der Ebene ein Cartesisches Koordinatennetz ziehen und die Polarkoordinaten in Cartesische verwandeln. Die Ebene ist hier auch bei Parameterdarstellung der Koordinaten ein Euklidisches Kontinuum.

Sobald wir unsere Annahme fallen lassen, wird sie ein Nichteuklidisches Kontinuum, wie es die rotierende Scheibe bzw. das entsprechende Gravitationsfeld vom Mittelpunkt aus betrachtet ist. Wohl können wir jeden Punkt der Scheibe in bezug auf den Mittelpunkt durch die Parameter r und φ festlegen. Aber da ein Einheitsmaßstab an verschiedenen Stellen (vom Mittelpunkt aus beurteilt) verschiedene Länge besitzt, so können wir z. B. die konstante Länge s eines Stabes, den wir längs des Radius in verschiedene Entfernungen vom Mittelpunkt bringen, nicht durch $s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ darstellen. In der Ebene als Nichteuklidischem Kontinuum sind also Cartesische Koordinaten nicht mehr möglich.

Immer aber können wir die Lage eines Punktes durch Parameter auf unendlich viele Arten festlegen. Im allgemeinsten Fall bedecken wir die Ebene mit zwei Scharen von beliebigen Kurven, die wir mit:

(268) $$u_1 = \text{konst.}, \qquad u_2 = \text{konst.}$$

bezeichnen (**Gaußsches Koordinatensystem**). Alle u_1-Kurven gehen kontinuierlich ineinander über, ohne sich zu schneiden; dasselbe gilt für die u_2-Kurven. Jede u_1-Kurve soll jede u_2-Kurve nur in einem Punkt schneiden. Für unsere Parameterdarstellung

r und φ sind diese Kurven die Radien und konzentrischen Kreise. Jeder Punkt ist als Schnittpunkt einer u_1- und u_2-Kurve, also durch zwei Zahlenwerte gegeben. Soll eine metrische Geometrie auf der Ebene in Parametern möglich sein, so müssen wir die Zahlenwerte für das gewählte Parameternetz, d. h. die Dichte dieses Netzes an jeder Stelle, irgendwie festlegen. Wir müssen eine unendlich kleine Längeneinheit definieren, die den Abstand benachbarter Kurven von Punkt zu Punkt angibt. Jedes „Messen" besteht dann im Bestimmen der Zahlen u_1 und u_2, durch welche die beiden in irgendeinem festgelegten Punkt sich schneidenden Parameterkurven charakterisiert sind.

Gehen wir von der Ebene zu einer beliebig gekrümmten Fläche über, so fällt die Möglichkeit, auf dieser mit starren, endlichen (geraden) Maßstäben zu messen, ganz fort. Eine beliebige Fläche von irgendwelcher Krümmung ist immer ein zweidimensionales Nichteuklidisches Kontinuum. Irgendein Flächenpunkt ist durch zwei Parameterwerte festgelegt, wobei im allgemeinsten Fall die Parameterlinien beliebige sich schneidende Scharen von u_1- und u_2-Kurven auf der Fläche sind. Die Dichte des Parameternetzes muß auch hier festgelegt sein, wenn eine Geometrie auf der Fläche bestehen soll.

Wir geben als Beispiel zwei Parameterdarstellungen der Kugel.

Wir gehen dabei von der Gleichung der Einheitskugel im Raum aus, die wir auf ein räumliches Cartesisches Koordinatensystem beziehen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 . \tag{269}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch:

$$x = \cos u_1 \cos u_2 , \quad y = \cos u_1 \sin u_2 , \quad z = \sin u_1 . \tag{270}$$

Die Lage eines Punktes auf der Kugel ist durch die Parameter u_1 und u_2, Breite und Länge, gegeben. Die Parameterlinien sind die Breiten- und Längenkreise auf der Kugel.

Eine andere Parameterdarstellung der Kugel erhalten wir dadurch, daß wir vom Mittelpunkt aus alle Punkte auf die Tangentialebene $z = 1$ im Südpol projizieren. Sind die Cartesischen Koordinaten in der Tangentialebene u_1, u_2, so ist:

(271) $$x = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 1}}, \quad y = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 1}},$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 1}}.$$

Jeder Punkt auf der Kugel ist durch ein Wertepaar u_1, u_2 festgelegt. u_1 und u_2 sind nicht nur die Koordinaten der Kugelpunkte in der Bildebene, sondern zugleich Parameter auf der Kugel selbst. Dem Netz Cartesischer Koordinaten der Bildebene entspricht ein Netz von Parameterlinien auf der Kugel. In entsprechender Weise können wir auch die Parameter u_1 und u_2 in (270) zugleich als Koordinaten in einer Ebene auffassen. Wir erhalten jedes Mal eine Abbildung der Kugel auf die Ebene.

Im allgemeinsten Fall ist analog (270) und (271) die Parameterdarstellung einer beliebigen Fläche, deren Koordinaten in einem räumlichen Cartesischen System x, y, z sind, durch:

(272) $$x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2), \quad z = z(u_1, u_2)$$

gegeben. Jeder Punkt ist durch zwei zusammengehörende Werte der Parameter u_1 und u_2 bestimmt. Immer entspricht ihm ein Punkt in Cartesischen Koordinaten auf einer Bildebene.

Ein besonders bemerkenswerte Parameterdarstellung ist noch folgende. Ist die Fläche in einem räumlichen Cartesischen System durch:

(273) $$z = f(x, y)$$

festgelegt, so ist:

(274) $$x = u_1, \quad y = u_2, \quad z = f(u_1, u_2) = f(x, y)$$

ein spezieller Fall von (272). Die Abbildung der Flächenpunkte ist eine senkrechte Projektion auf die xy-Ebene. Die Parameter sind zugleich Cartesische Koordinaten in der Projektionsebene; die Parameterlinien eine entsprechende Übertragung des Cartesischen Netzes dieser Ebene auf die Fläche.

Ebenso wie nun in unserem zweidimensionalen Nichteuklidischen Kontinuum jeder Punkt durch zwei Parameterwerte festgelegt ist, soll in der allgemeinen Relativitätstheorie jeder Raum-Zeit-Punkt durch vier solche Werte bestimmt sein. Jedem Weltpunkt entsprechen also vier Parameter x_1, x_2, x_3, x_4, von denen x_1, x_2, x_3

räumlich, x_4 zeitlich ist. Jedes Naturgesetz ist ein Gleichungssystem zwischen solchen Parametern.

Stehen wir nun durch die Forderung, daß wir bei unseren Beobachtungen keine Cartesischen Koordinaten bestimmen, sondern Parameter, nicht in Widerspruch mit der Erfahrung?

Alle physikalischen Messungen sind in letzter Linie räumliche und zeitliche Messungen. Wir messen mit Maßstäben, die wir bisher als starr ansahen; mit Uhren, deren Gang wir als unveränderlich annahmen. Das sind jedoch Hypothesen, die wir fallen lassen können, ohne beim Messen auf Widersprüche zu stoßen. Denn unsere Messungen beruhen lediglich auf der Konstatierung von Koinzidenzen räumlicher und zeitlicher Art. Wir bringen Punkte möglichst zur räumlichen Deckung mit anderen Punkten; wir beobachten das Zusammentreffen eines Ereignisses mit einer bestimmten Zeigerstellung unserer Uhr. Wenn auch ein Maßstab sich beliebig krümmt oder dehnt, eine Uhr beliebig ihren Gang ändert, sobald wir sie an verschiedene Stellen des Raumes bringen, das Meßverfahren als solches bleibt dadurch unberührt. Koinzidenzen können ebensogut in Parametern wie in Cartesischen Koordinaten stattfinden. Von dieser Seite des Problems ist also ein Widerspruch gegen die Forderung der allgemeinen Relativitätstheorie nicht zu erwarten. Vielmehr das Gegenteil.

Die Tatsache, daß wir lediglich Koinzidenzen beobachten können (ebenso wie diejenige, daß wir nur relative Bewegungen wahrnehmen), zeigt, daß kein Grund vorliegt, gewisse Koordinatensysteme besonders zu bevorzugen. Wir sind deshalb auch berechtigt, unserem S. 107 aufgestellten Problem eine noch weitere Fassung zu geben, wodurch der Zusammenhang mit der Riemannschen Geometrie noch enger wird. Wir verlangten Invarianz in bezug auf beliebig zueinander bewegte Systeme. Wir geben dem Problem sicher die denkbar größte Allgemeinheit, wenn wir, statt dessen, eine Invarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen fordern. Unsere allgemeinen Naturgesetze sollen also unverändert bestehen bleiben, wenn der Übergang aus einem System in ein anderes auf Grund der allgemeinen Transformationsgleichungen:

(275) $$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

erfolgt. Da in irgendwie bewegten Systemen die räumlichen und zeitlichen Parameter sich ändern (vgl. S. 120), so sind diese Änderungen in unserer allgemeineren Forderung auf jeden Fall enthalten. Ob freilich in der Physik eine Einschränkung der Problemstellung durch die Natur der Dinge von vornherein geboten wäre, ist eine Frage, die hier (vgl. jedoch S. 137) nicht erörtert werden soll[1]).

Wir stellen uns also jetzt die Aufgabe: Naturgesetze aufzufinden, die gegenüber beliebigen Koordinaten- (bzw. Parameter-) Transformationen invariant sind. Nach unseren Ausführungen über Invarianz (S. 75) werden es Differentialgesetze sein müssen. Sie werden der Form nach Gesetze einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Geometrie sein.

In dieser allgemeinen Fassung hat die Aufgabe natürlich keinen Sinn. Wollen wir geometrische Sätze herleiten, so müssen die geometrischen Größen numerisch erfaßbar sein. Wir müssen messen können, und dazu müssen Maßeinheiten festgelegt werden. Zur Lösung unserer Aufgabe ist eine Festsetzung über die in beliebigen Koordinatensystemen geltenden Maßeinheiten im Unendlichkleinen notwendig (vgl. S. 125). Auch die Euklidische Geometrie ist erst dadurch möglich, daß wir annehmen, Maßstäbe bleiben im ganzen Raum unverändert.

Wir könnten nun unmittelbar an die Riemannsche Geometrie anknüpfen. Doch wollen wir — dem historischen Gang folgend — das Problem zuerst von der rein physikalischen Seite aus behandeln. Wir werden dabei finden, daß der Zusammenhang zwischen Riemannscher Geometrie und allgemeiner Relativitätstheorie ein noch weit engerer ist, als er bisher schon hervortrat.

Wir betrachten in einem beliebigen Koordinatensystem K die unendlich kleine Umgebung eines Punktes P, in welcher ein Gravitationsfeld vorhanden sein möge. Nach den S. 111 gegebenen Ausführungen können wir in einem unendlich kleinen räumlichen Gebiet und für ein unendlich kleines Zeitintervall das System K stets durch ein so zu ihm beschleunigtes ersetzen, daß in dem neuen System K' ein Gravitationsfeld nicht vorhanden ist, und dieses zugleich als nicht beschleunigt angesehen

[1]) Siehe hierzu E. Kretschmann, Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate. Annal. d. Physik (4) Bd. 53. 1917. S. 575.

werden kann. Wir nennen das so definierte vierdimensionale System K' das örtliche oder lokale Raum-Zeit-System in der Umgebung eines Punktes. K wollen wir als das allgemeine System[1]) bezeichnen.

Ersetzen wir das System K mittels einer willkürlichen Transformation (275) durch irgendein anderes, oder bringen wir die unendlich kleine Umgebung des Punktes P an eine andere Stelle unseres beliebigen Systems K, so können wir vom allgemeinen immer wieder zu einem zu P gehörenden lokalen System gelangen. In allen lokalen Systemen erfolgen an jeder Stelle die Vorgänge so, als ob dieses unendlich kleine Gebiet gravitationsfrei und unbeschleunigt sei.

Wir machen nun die Annahme: für alle lokalen Koordinatensysteme K', die irgendwelchen unendlich kleinen vierdimensionalen Gebieten angehören, gelte die spezielle Relativitätstheorie.

Wir legen einen unserem Punkt P unendlich benachbarten Weltpunkt P' durch vier reelle Koordinaten dX_1, dX_2, dX_3, dX_4 fest, die sich nun auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit drei imaginären und einer reellen Achse beziehen[2]). Unser Linienelement im lokalen System setzen wir also in der allgemeinen Relativitätstheorie stets in der Form (60) an und schreiben:

$$ds^2 = dX_4^2 - (dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2)\,. \tag{276}$$

ds^2 ist nun positiv für ein zeitartiges, negativ für ein raumartiges Linienelement. Im ersteren Fall ist P' aus P durch eine Bewegung hervorgegangen. Die räumlichen Koordinaten von P' in bezug auf P können durch einen innerhalb jedes lokalen Systems unveränderlichen, unendlich kleinen Maßstab gemessen werden, die Zeitkoordinate durch eine Uhr, die ihren Gang in jedem lokalen System beibehält. ds^2 hat einen bestimmten, nach der speziellen Relativitätstheorie für jedes lokale System unverändert bestehenden, durch Raum-Zeit-Messung zu ermittelnden Wert.

[1]) Man nennt das allgemeine Parametersystem auch das natürliche System, die Parameter selbst natürliche Koordinaten. Längen und Zeiten, die durch Parameterdifferenzen festgelegt sind, können wir darum als „natürlich gemessen“ bezeichnen.

[2]) Diese von der früheren abweichende Art der Wahl der Koordinatenachsen behalten wir im folgenden aus Zweckmäßigkeitsgründen bei.

Die Lichtgeschwindigkeit besitzt in jedem lokalen System den universellen Wert c. Treffen wir für die Zeiteinheit die S. 24 angegebene Wahl, so wird $c = 1$.

Die Lage des Punktes P' in bezug auf P ist nun in einem allgemeinen System K durch vier Parameterdifferentiale dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 festgelegt. Das allgemeine System ist in der unendlich kleinen Umgebung von P ein von Punkt zu Punkt verschiedenes affines mit noch zu bestimmenden Maßverhältnissen (vgl. S. 67). Da zwischen Cartesischem und affinem System die Beziehungen:

(277) $$x_i' = \alpha_{ik} x_k \qquad (\alpha_{ik} = \text{konst.})$$

allgemein bestehen, so erhalten wir hier zwischen den Differentialen die linearen, homogenen Gleichungen:

(278) $$dX_i = \alpha_{ik} dx_k.$$

Unser Linienelement (276) geht im allgemeinen System über in:

(279) $$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}).$$

Der Wert von ds^2 ist dabei der in unserem lokalen System bestimmte. Da ds^2 nach (276) eine Invariante ist, so führt auch jede beliebige Koordinatentransformation (275) für (279) stets zu demselben Wert von ds^2.

Aus der Annahme, daß für alle lokalen Koordinatensysteme die spezielle Relativitätstheorie besteht, folgt also: das Linienelement ds ist eine Invariante in bezug auf jede beliebige Transformation unserer Raum-Zeit-Parameter. Das vierdimensionale Linienelement besteht unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl.

Ein Linienelement behält also seinen Wert an jeder „Stelle" bei beliebiger Koordinatentransformation, oder wenn wir es von einer „Stelle" unseres vierdimensionalen Systems an irgendeine andere bringen. Immer kann sein Wert durch räumliche und zeitliche Messungen in dem jeweils bestehenden lokalen System erhalten werden. Die dabei zu benutzenden, unendlich kleinen Maßstäbe behalten in jedem lokalen System, also für einen Beobachter, der sich an der Stelle des Punktes P selbst befindet, dieselbe Länge; die zu benutzende Uhr denselben Gang. Wie sich Maßstäbe und Uhren im allgemeinen System (be-

urteilt von einer bestimmt festgelegten Stelle aus) verhalten, werden wir bald besprechen können (vgl. S. 134).

Das invariante Linienelement wird es nun ermöglichen, die Maßverhältnisse an jeder Stelle unseres Parametersystems festzulegen. Zuvor müssen wir noch mit einer wichtigen Eigenschaft der Koeffizienten g_{ik} bekannt werden.

Die Koeffizienten g_{ik} des Linienelements sind im allgemeinen System zufolge (278) Funktionen der Parameter x_i, deren Wert im allgemeinsten Fall von Punkt zu Punkt wechselt. Die g_{ik} hängen jedoch nicht von der Art des lokalen Systems ab. Gehen wir von einem allgemeinen System K zu einem anderen über, so ist unabhängig von jedem lokalen System:

(280) $$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k = g'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k.$$

Die g_{ik} sind also lediglich Funktionen der Parameter des zugehörenden Systems K.

Ihre Bedeutung in der allgemeinen Relativitätstheorie geht aus folgendem hervor. In der speziellen Relativitätstheorie, d. h. für zueinander geradlinig und gleichförmig bewegte Systeme bestehen für die S. 129 neu getroffene Wahl des Koordinatensystems die Werte:

(281) $$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

in beliebigen endlichen Gebieten [vgl. (159)]. Ein sich selbst überlassener Massenpunkt bewegt sich in einem solchen Gebiet geradlinig und gleichförmig.

Gehen wir nun durch eine beliebige Substitution (275) zu einem willkürlich bewegten Raum-Zeit-System über, so werden die g_{ik} beliebige Funktionen der x'_i. In bezug auf das neue Koordinatensystem ist die Bewegung unseres Punktes krummlinig und ungleichförmig; jedoch ist sie unabhängig von der Natur des bewegten Massenpunktes selbst. Der Massenpunkt befindet sich in einem Gravitationsfeld. Je nach der Beschaffenheit des Gravitationsfeldes sind die g_{ik} andere und andere Funktionen der Parameter. Die 10 Koeffizienten g_{ik} des Linienelements in einem beliebigen Raum-Zeit-System beschreiben also das Gravitationsfeld an jeder Stelle des Systems. Im lokalen Koordi-

natensystem dagegen sind die g_{ik} konstant und können durch eine besondere Transformation in die Werte (281) übergeführt werden. Aus einem später noch zu erörternden Grund bezeichnen wir die g_{ik} als die Potentiale des Gravitationsfeldes.

Daß die g_{ik} zugleich auch die Maßverhältnisse im allgemeinen Parametersystem bestimmen, erkennen wir sofort, wenn wir uns wieder der Riemannschen Geometrie zuwenden.

Wir haben bis jetzt gefunden, daß jeder Punkt einer Fläche durch zwei unabhängige Wertangaben festgelegt ist; wir bezeichnen die Fläche mit Riemann als zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Entsprechend wird jede Kurve als einfach, jeder Raum als dreifach, die „Welt" als vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zu bezeichnen sein. Noch fehlt uns die Möglichkeit in diesen Mannigfaltigkeiten zu messen, also eine metrische Geometrie aufzubauen; es fehlt uns eine Festsetzung über den auf einer beliebigen Fläche — wir wollen uns jetzt wieder auf zwei Dimensionen beschränken — zu benützenden Maßstab (vgl. S. 128).

Hierüber können verschiedene Annahmen gemacht werden. Riemann schränkt in seiner Antrittsvorlesung die verschiedenen Möglichkeiten so weit ein, daß schließlich als der auf der ganzen Fläche gültige, unveränderliche Maßstab das unendlich kleine Linienelement ds, der Abstand zweier unendlich benachbarter, starr miteinander verbundener Punkte bleibt[1]). Wir kommen dadurch — in Analogie mit den Forderungen der allgemeinen Relativitätstheorie (S. 130) — zu einer bestimmten, der Riemannschen Differentialgeometrie.

Die Form des Linienelements einer Fläche, ausgedrückt durch die Flächenparameter, erhalten wir auf folgende Weise. Ist eine Fläche durch räumliche Cartesische Koordinaten festgelegt, so ist der Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte:

(282) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wo nach (272):

(283) $$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2,$$

[1]) In welcher Weise andere Annahmen möglich sind, zeigt z. B. die Untersuchung von H. Weyl, Gravitation und Elektrizität. Sitzber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1918. S. 465. Vgl. auch den Vortrag von H. Weyl: Elektrizität und Gravitation auf der Naturforscherversammlung Bad Nauheim 1920.

und entsprechend dy und dz lauten. Also wird der Abstand ds bestimmt durch:

(284) $$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\,du_i\,du_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}).$$

Hierbei ist:

(285) $$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i}\frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\partial z}{\partial u_k}.$$

Die 10 Größen g_{ik} sind Funktionen der Parameter und in der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes konstant.

Das Linienelement (284) ist völlig identisch mit dem Ausdruck (279) der allgemeinen Relativitätstheorie. Wie dort ds^2 unverändert für jedes Koordinatensystem besteht, so auch hier. Auch in der Riemannschen Geometrie ist ds eine Invariante in bezug auf beliebige Koordinatentransformationen.

Wie dort im Unendlichkleinen die spezielle Relativitätstheorie gilt, so besteht hier im Unendlichkleinen infolge der Unveränderlichkeit des Linienelements ds die Euklidische Geometrie. Es läßt sich demnach in der Umgebung jedes Punktes das allgemeine Koordinatensystem der Fläche durch ein Cartesisches ersetzen und durch lineare, homogene Transformation das Linienelement entsprechend der Gleichung (276) in die Form:

(286) $$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

bringen[1]). Ein solches Cartesisches System, das in der Umgebung eines Punktes besteht, werden wir wieder ein lokales System nennen. In ihm gilt der Pythagoreische Lehrsatz (286).

Je nach den gewählten Parametern nimmt das Linienelement (284) verschiedene Formen an. Für die Einheitskugel (269) erhalten wir z. B. aus (285) bei der Parameterdarstellung (270):

(287) $$ds^2 = du_1^2 + \cos^2 u_1\,du_2^2,$$

und für (271) das Linienelement:

(288) $$ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}.$$

Das invariante Linienelement (284) legt nun, wie wir zeigen wollen, in der Riemannschen Geometrie die Maßverhält-

[1]) dx, dy sind hier keine totalen Differentiale. Vgl. auch S. 136.

nisse der Fläche in eindeutiger Weise fest. In der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes ist jedes allgemeine System als ein affines aufzufassen (vgl. S. 74); die beiden Koordinatenachsen schneiden sich unter beliebigem Winkel, auf jeder der Achsen gilt eine andere Maßeinheit. Sind die Achsen und die Maßverhältnisse auf ihnen gegeben, so ist die Geometrie in der Umgebung des Punktes P festgelegt. Wir können dann die Lage eines benachbarten Punktes P' durch zwei Zahlenwerte eindeutig angeben.

Geben wir einem Linienelement mit bekannten Koeffizienten g_{ik} die Länge eins, so besitzen wir damit zunächst einen Einheitsmaßstab in der Umgebung jedes Punktes (im lokalen System). Zugleich ist auch das Parameternetz auf der Fläche für die Umgebung jedes Punktes in dem eben ausgeführten Sinn bestimmt, da wir nun die Möglichkeit besitzen, die Maßverhältnisse von einer Stelle an jede beliebig andere zu übertragen.

Liegt nämlich auf einer beliebigen Fläche der dem Punkt P unendlich benachbarte Punkt P' auf der durch P gehenden u_1-Linie, so ist für den Abstand $PP' = ds = 1$ die Differenz der Parameter gegeben durch:

$$(289) \qquad du_1 = 0, \qquad du_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Die u_2-Linien sind also an der Stelle P so dicht zu wählen, daß zwischen P und P' die Anzahl $\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$ solcher Linien zu liegen kommt. Wählen wir $PP' = ds = 1$ auf der durch P gehenden u_2-Linie, so ist entsprechend:

$$(290) \qquad du_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad du_2 = 0,$$

und die Anzahl der u_1-Linien ist durch $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$ festgelegt. Ein unendlich kleiner Maßstab, der im lokalen System die Länge eins hat, besitzt im allgemeinen System eine davon verschiedene, von seiner Lage abhängende Länge. Die Größen $\sqrt{g_{11}}$ und $\sqrt{g_{22}}$ geben für das Parametersystem an jeder Stelle das Verhältnis der beiden Maßstäbe des affinen Systems zu dem Maßstab im lokalen System.

Auch der Winkel zwischen den beiden Achsen des affinen

Systems ist durch die Koeffizienten g_{ik} des Linienelements festgelegt. Wie sich in der Differentialgeometrie zeigen läßt[1]), ist der Winkel zwischen zwei beliebigen unendlich kleinen Verschiebungen, deren Komponenten du_1, du_2 bzw. δu_1, δu_2 sind, gegeben durch:

(291) $$\cos\alpha = \frac{g_{11} du_1 \delta u_1 + g_{12}(du_1 \delta u_2 + du_2 \delta u_1) + g_{22} du_2 \delta u_2}{\sqrt{g_{11} du_1^2 + 2 g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2}\sqrt{g_{11} \delta u_1^2 + 2 g_{12} \delta u_1 \delta u_2 + g_{22} \delta u_2^2}}.$$

Fällt die eine Verschiebung in die u_1-Linie, die andere in die u_2-Linie, so erhalten wir hieraus:

(292) $$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} \cdot g_{22}}}.$$

Dadurch ist das Achsensystem des affinen Systems also festgelegt.

Ferner ist der Inhalt des unendlich kleinen, zwischen beiden Verschiebungen liegenden Parallelogramms[2]):

(293) $$dJ = \sqrt{g} \begin{vmatrix} du_1 & du_2 \\ \delta u_1 & \delta u_2 \end{vmatrix},$$

wo g die Determinante der g_{ik}, also:

(294) $$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Damit ist gezeigt, daß das Linienelement die Geometrie auf der Fläche eindeutig bestimmt. Für verschiedene Parameterdarstellungen derselben Fläche, also für verschiedene Formen des Linienelements wie z. B. (287) und (288) kommen wir auf verschiedene Arten von Geometrien.

Es ist jedoch zu beachten, daß die Koeffizienten g_{ik} des Linienelements wohl die Geometrie auf der Fläche festlegen, nicht aber die Fläche selbst. Denken wir uns zwei Flächen, auf denen Punkt für Punkt die Linienelemente übereinstimmen, so können wir die eine auf der anderen so abbilden, daß jeder Kurve auf einer Fläche eine gleichlange Kurve auf der anderen entspricht. Die eine Fläche ist auf der anderen abwickelbar, oder die eine

[1]) Vgl. z. B. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen. 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 39.

[2]) Ebenda S. 45.

Fläche läßt sich auf der anderen verbiegen. Sind die Koeffizienten des Linienelements für jeden Punkt gegeben, so gilt also die dadurch bestimmte Geometrie für alle aufeinander abwickelbaren Flächen.

Sie beschränkt sich nicht auf diese; sie gilt z. B. ebenso auf der „Bildebene" (vgl. S. 126), wenn wir auf dieser dem Linienelement die Gleichung (284) zuweisen. So ist die Geometrie auf der Kugel und der Bildebene dieselbe, wenn auf letzterer das Linienelement die Gestalt (287) oder (288) hat.

Einen Punkt wollen wir hier noch erledigen. Wir haben S. 121 hervorgehoben, daß im Euklidischen Kontinuum bei der Wahl eines Cartesischen Koordinatensystems das Linienelement eine besonders einfache Form (266′) besitzt, und auch S. 124 darauf hingewiesen, daß die Ebene das einzige zweidimensionale Kontinuum ist, das Euklidisch sein kann.

Wir wollen hierfür den Nachweis erbringen.

Auf einer Fläche soll ein Parameternetz so bestimmt werden, daß das Linienelement an jeder Stelle die Form:

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 \tag{295}$$

im allgemeinen System hat. Untersuchen wir, für welche Flächen dies möglich ist. Wir gehen auf die Parameterdarstellung (274) zurück; x, y, z sind dort die Koordinaten in einem beliebig zu wählenden Cartesischen System. Nach (285) nehmen die Koeffizienten die Form an:

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2. \tag{296}$$

Soll das Linienelement auf der ganzen Fläche die Form (295) besitzen, so muß $z = f(x, y)$ für jedes x und y konstant sein. Die Fläche ist eine Ebene, die parallel zur entsprechend gewählten xy-Ebene verläuft. Die Parameter u_1 und u_2 sind Cartesische Koordinaten in der Ebene.

Während also in jedem der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes angehörenden lokalen System das Linienelement für jede beliebige Fläche die Form $ds^2 = dx^2 + dy^2$ besitzt, besteht allein auf der Ebene (und auf jeder darauf abwickelbaren Fläche) die Möglichkeit, ein Koordinatennetz so zu ziehen, daß das Linienelement im allgemeinen System $ds^2 = dx^2 + dy^2$ lautet.

Gehen wir in der Ebene von Cartesischen zu affinen Koordinaten über, so nimmt das Linienelement die Form (284) an. Dabei sind die g_{ik} in der ganzen Ebene konstante Größen.

Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Besteht in einem zweidimensionalen Kontinuum die Euklidische Geometrie, so müssen sich die Koeffizienten g_{ik} des Linienelements (284) durch irgendwelche Transformationen der Parameter in Konstante überführen lassen.

Dieselben geometrischen Verhältnisse gelten nun auch für drei und jede höhere Anzahl von Dimensionen. Im allgemeinen sind die Koeffizienten g_{ik} des n-dimensionalen Linienelements:

(297) $$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

Funktionen des Ortes. Sie bestimmen die Geometrie an jeder Stelle des Kontinuums. Besitzen sie überall konstante Werte, oder gibt es Transformationen, durch welche sie in solche übergeführt werden, so ist das Kontinuum ein Euklidisches; wir bezeichnen die n-fache Punkt-Mannigfaltigkeit mit Riemann als eben.

Durch die vorstehenden Betrachtungen haben wir nun die weitere Deutung der Koeffizienten des Linienelements (279) unseres Raum-Zeit-Kontinuums gewonnen. Die g_{ik} beschreiben nicht nur das Gravitationsfeld an jeder Stelle des Raumes zu jeder Zeit, sondern geben zugleich — zufolge der Invarianz des Linienelements, also zufolge der Voraussetzung, daß im Unendlichkleinen die spezielle Relativitätstheorie gilt — die metrischen Eigenschaften unseres vierdimensionalen Kontinuums von Punkt zu Punkt.

Hierbei ist freilich der Unterschied zwischen räumlichen und zeitlichen Koordinaten völlig verschwunden. Wollen wir jedoch mit der Anschauung in Übereinstimmung bleiben, so muß eine Trennung der „Welt" in Raum und Zeit weiter bestehen. Wir können hierbei dem Linienelement (279) eine speziellere Form geben.

In unserem lokalen System (S. 129) war das Linienelement durch (276) dargestellt, die Koeffizienten g_{ik} durch (281).

Dasselbe gilt für ein unbeschleunigtes, endliches System in einem gravitationsfreien Raum; dieser ist durch konstante Koeffizienten g_{ik} charakterisiert, die sich durch eine Transformation

immer in (281) überführen lassen. Das Koordinatensystem, dem dieses Linienelement zugehört, ist ein räumliches Cartesisches System. Die reelle Zeitachse steht auf den drei räumlichen imaginären Achsen (vgl. S. 129), also auf jeder beliebigen räumlichen Richtung senkrecht. Wir können sagen: der Zeitvektor steht auf dem Raum senkrecht. Soll die Zeit ihre Sonderstellung gegenüber den räumlichen Koordinaten auch in der allgemeinen Relativitätstheorie wahren, soll sie weiterhin als Vektor auf jeder räumlichen Richtung senkrecht stehen, so muß das Linienelement die Form annehmen:

(298) $$ds^2 = f^2 dx_4^2 - d\sigma^2,$$

wo:

(299) $$d\sigma^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

ist. Unsere Koeffizienten g_{ik} sind also hier:

(300) $$\begin{aligned} g_{ik} &= -\gamma_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ g_{4i} &= g_{i4} = 0, \qquad g_{44} = f^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten γ_{ik} beschreiben die in unserem beliebig bewegten räumlichen System oder in dem entsprechenden Gravitationsfeld von Punkt zu Punkt bestehende Geometrie, f^2 den Zusammenhang der Zeit mit diesem System. Beschränken wir unsere beliebigen vierdimensionalen Koordinaten-Transformationen auf solche, die sich auf beliebig zueinander bewegte räumliche Systeme beziehen, bei denen also Raum und Zeit getrennt bestehen, so läßt sich das Linienelement stets in die Form (298) bringen.

Dieses Linienelement zeigt nun auch, in welcher Weise wir mit Hilfe der g_{ik} die Metrik des allgemeinen Raum-Zeit-Systems an jeder Stelle festlegen können. Wir knüpfen an die Überlegungen an, die S. 134 für die Fläche durchgeführt worden sind.

In der speziellen Relativitätstheorie besitzt das Linienelement $ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ für jedes geradlinig und gleichförmig bewegte System denselben Wert. Hierbei war angenommen, daß innerhalb eines Systems jeder endliche Maßstab seine Länge, jede Uhr ihren Gang behält, wenn wir sie aus einem System in ein dazu gleichförmig bewegtes brachten. Stablänge und Uhrgang waren von der Geschwindigkeit eines Systems dann abhängig,

wenn wir sie von einem dazu relativ ruhenden System aus beurteilen.

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist das Linienelement $ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ eine Invariante für jede beliebige Transformation der Parameter x_i. Der Wert von ds wird durch Messungen in einem lokalen System mittels unendlich kleiner Maßstäbe und mittels Uhren erhalten, von denen beiden wir annehmen, daß sie sich beim Verbringen von einem lokalen System in ein anderes nicht ändern. Wir müssen nun untersuchen, wie verhalten sich die Maßstäbe und Uhren vom allgemeinen System aus beurteilt. Befinden wir uns an der Stelle, an der gemessen werden soll, nicht selbst, so sind die unendlich kleinen Maßstäbe, sowie die Uhren nicht unmittelbar verwendbar. Wir nehmen lediglich räumliche und zeitliche Parameterdifferenzen wahr, und diese sind für dasselbe unveränderliche ds von Ort zu Ort verschieden.

Betrachten wir den räumlichen Abstand zweier unendlich benachbarter, starr miteinander verbundener Punkte. Für ihn ist $dt = 0$, und wählen wir ihn als Maßstab, so wird nach (298) $ds^2 = -1$ (gemessen in einem lokalen System). Dieser Wert ist eine Invariante für jede beliebige vierdimensionale Koordinatentransformation; ds behält seinen Wert an jeder Stelle des allgemeinen Systems. Legen wir die beiden Punkte an irgendeinen Ort so, daß ihre Verbindungslinie in die x_1-Achse unseres allgemeinen Systems an irgendeiner Stelle fällt, so wird $dx_2 = dx_3 = 0$ und $g_{11}\,dx_1^2 = -1$, oder:

$$dx_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}. \tag{301}$$

Die Endpunkte des starren Stäbchens $ds = \sqrt{-1}$ haben also in unserem Parameternetz nicht den absoluten Abstand eins, sondern den durch (301) als Parameterdifferenz festgelegten Wert. Da nun in der allgemeinen Relativitätstheorie das natürliche Messen im Bestimmen von Parameterdifferenzen innerhalb des allgemeinen Systems besteht — wir können nur in unserer unmittelbaren Umgebung Euklidisch messen —, so werden die Längen an jeder Stelle von den Koeffizienten des Linienelements abhängen. Neben die konstante Länge im lokalen System tritt die variable Länge im allgemeinen. Dasselbe gilt von den Zeiten. Denn betrachten wir

einen rein zeitlichen Abstand $ds^2 = f^2 dx_4^2 = 1$, so ist die Parameterdifferenz an jeder Stelle:

$$dx_4 = \frac{1}{f}. \tag{302}$$

Die Größe f ist nichts anderes als die Lichtgeschwindigkeit im allgemeinen System. Ist nämlich der Raum-Zeit-Abstand ds in (298) so entstanden, daß ein Punkt P sich mit Lichtgeschwindigkeit nach dem unendlich benachbarten P' bewegt hat, so ist nach (276) $ds = 0$, also im allgemeinen System für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit:

$$f = \frac{d\sigma}{dx_4}. \tag{303}$$

f ist im allgemeinen von 1 verschieden und eine Funktion der Parameter (vgl. S. 112).

Für das allgemeine Parametersystem ist also Stablänge und Uhrgang von Ort zu Ort veränderlich; beide sind Funktionen der Koeffizienten des Linienelements an jeder Stelle; sie sind also in letzter Linie vom Gravitationsfeld abhängig, das zugleich metrisches Feld ist.

Machen wir die Annahme, daß das Gravitationsfeld durch die Materie des Weltenraums eindeutig gegeben ist, so legt also die Materie die Metrik von Raum und Zeit fest[1]). Die Geometrie an irgendeiner Stelle des Raumes ist durch die Materie der Umgebung bestimmt[2]). Der Raum hat also seine Gegenständlichkeit und Selbständigkeit völlig verloren. Die Relativitätstheorie kennt nicht nur keine Bewegung mehr relativ zum „Raum"; der Raum besitzt auch an und für sich keine geometrischen Eigenschaften mehr.

Damit sind wir an der Stelle angelangt, von der aus wir die grundlegenden Gedankengänge der allgemeinen Relativitätstheorie überblicken können.

---

[1]) Vgl. hierzu jedoch H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Berlin 1918. S. 176. Fußnote.

[2]) Daß die Länge eines Maßstabes oder der Gang einer Uhr vom Gravitationsfeld abhängt, in welchem sich Maßstab und Uhr befinden, ist vielleicht weniger erstaunlich, wenn wir uns einmal vergegenwärtigen, daß beide auch z. B. von der Temperatur abhängig sind, die an einer Stelle des Raumes herrscht.

Schon die spezielle Relativitätstheorie hatte dazu geführt, Materie und elektromagnetisches Feld als eine Einheit aufzufassen (vgl. S. 105); das Äquivalenzprinzip ergab von neuem, daß Materie und elektromagnetische Energie sich im Gravitationsfeld völlig gleich verhalten. Die Einheit von Materie und Elektrizität, in ihrer Gesamtheit als „Feld" bezeichnet, ist also das in der Welt ursprünglich Vorhandene, ewig in Bewegung und Wechsel begriffen, aber im Ganzen doch unzerstörbar.

Daneben steht ein zweites. Überall in unserem wirklichen, mit Materie erfüllten Raum ist an jeder Stelle, an welcher Materie (oder das „Feld") nicht selbst vorhanden ist, doch eine Energie wirksam, die wir Gravitation nennen. Es treten physikalische Eigenschaften, das Gravitationsfeld, auf, die an Raum und Zeit gebunden sind. Die Materie bedingt dieses Gravitationsfeld. Sie bedingt zugleich auch die metrischen Eigenschaften von Raum und Zeit. Geben wir dem Inbegriff der physikalischen Eigenschaften des Raumes den Namen „Äther"[1]), so führt das Relativitätsprinzip zu dem Satz: das „Feld" bestimmt den „Äther" zu jeder Zeit und zugleich die metrischen Eigenschaften von Raum und Zeit in eindeutiger Weise. Die Koeffizienten g_{ik}, welche die Metrik von Raum und Zeit festlegen, sind bestimmend für alle Bewegungsvorgänge; sie selbst sind Funktionen von Materie und Elektrizität.

Die Aufgabe der Relativitätstheorie besteht also einmal darin, allgemeine invariante Naturgesetze für alle Bewegungsvorgänge aufzustellen, und zugleich darin, invariante Gesetze für die Abhängigkeit der g_{ik} von der Materie herzuleiten. Einstein hat

[1]) Wir behalten also den Begriff „Äther" für dasjenige Reale bei, das im Raum an Stellen vorhanden ist, an denen Materie und elektromagnetische Energie fehlt. In diesem Sinne können wir den Gravitationsäther als „Raum" schlechthin auffassen und in Gegensatz zur „Materie" stellen. Inwiefern wir den Äther auch weiterhin als Medium ansehen können, dem freilich alle mechanischen und kinetischen Eigenschaften fehlen, darüber siehe A. Einstein, Äther und Relativitätstheorie, Berlin 1920. Ein grundlegender Unterschied zwischen dem Äther der klassischen Physik und dem der Relativitätstheorie ist immer im Auge zu behalten. Ersterer war der Inbegriff physikalischer Eigenschaften, die dem Raum an jeder Stelle in gleicher Weise zukamen, und die selbständig und unveränderlich existierten. Der Äther der Relativitätstheorie ist an die im Raum vorhandene Materie (und das elektromagnetische Feld) gebunden und variiert räumlich und zeitlich.

diese Aufgabe in seiner Gravitationstheorie gelöst oder wenigstens die fundamentalen Ansätze gegeben.

Hier endlich sind wir auch in der Lage, die Forderungen der Invarianz auf Grund unserer geometrischen Betrachtungen in aller Schärfe zu definieren. Wir verlangen eine Invarianz der allgemeinen Naturgesetze in bezug auf alle beliebigen Systeme unter der Voraussetzung, daß im Unendlichkleinen bei geeigneter Koordinatenwahl die spezielle Relativitätstheorie gilt (vgl. S. 129); oder wir verlangen eine Invarianz im Riemannschen vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum.

Ehe wir uns jedoch der Lösung der Aufgaben der allgemeinen Relativitätstheorie zuwenden, müssen wir noch einmal zur Tensoranalysis zurückkehren.

§ 12. Allgemeine Tensoranalysis (II. Teil). Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

In § 7 hatten wir die allgemeine Tensoranalysis so weit behandelt, als deren Kenntnis für die spezielle Relativitätstheorie notwendig war.

Wir müssen uns nun im besonderen mit der Bildung von Tensoren durch Differentiation im allgemeinsten Fall beschäftigen und haben dazu noch einige Vorbereitungen notwendig.

Einmal folgendes. Das durch (279) definierte Linienelement ist eine Invariante in bezug auf beliebige Koordinatentransformationen. Die Koeffizienten g_{ik} des Linienelementes bilden demnach, wie wir bereits S. 77 hervorhoben, einen symmetrischen kovarianten Tensor II. Ranges, den wir als Fundamentaltensor bezeichnen.

Es gibt auch einen kontravarianten Fundamentaltensor, den wir aus dem kovarianten herleiten können. Wir zeigen: ist g die Determinante der g_{ik} $(= g_{ki})$, also:

$$(304) \qquad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} = |g_{ik}|$$

so bilden die Unterdeterminanten zu g_{ik} dividiert durch g die Komponenten g^{ik} $(= g^{ki})$ eines kontravarianten Tensors.

Beachtet man, daß die Determinante:

$$g = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\,(g^{ik}\,g)\,,$$

und ferner, daß eine Determinante, bei welcher zwei Horizontal- oder Vertikalreihen denselben Wert haben, null ist, so ergibt sich die Beziehung:

(305) $$g_{ir}\,g^{kr} = \delta_i^k \begin{cases} = 1 & \text{für } i = k \\ = 0 & \text{für } i \neq k\,. \end{cases}$$

Die Summation ist hier nur über r auszuführen (Verjüngung). δ_i^k ist selbst ein Tensor (vgl. S. 73), den wir als **gemischten Fundamentaltensor** bezeichnen.

Nun ist:

(306) $$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k = g_{is}\,\delta_k^s\,dx_i\,dx_k = g_{is}\,g_{kt}\,g^{st}\,dx_i\,dx_k\,.$$

Beachten wir, daß:

(307) $$g_{is}\,dx_i = d\xi_s\,, \qquad g_{kt}\,dx_k = d\xi_t$$

kovariante Vierervektoren sind, so ist:

(308) $$ds^2 = g^{st}\,d\xi_s\,d\xi_t\,.$$

Die Koeffizienten g^{st} sind also Komponenten eines kontravarianten Tensors II. Ranges, des **kontravarianten Fundamentaltensors**. Wir können aus den Komponenten des kovarianten Fundamentaltensors stets diejenigen des kontravarianten herleiten und umgekehrt.

Wegen des Vorzeichens von g ist nun noch eine besondere Festsetzung zu treffen. Der Inhalt eines unendlich kleinen vierdimensionalen Raum-Zeit-Volumens ist nach (293):

$$dJ = \sqrt{g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,.$$

Der Wert dJ besteht unabhängig vom Koordinatensystem. Für das lokale System ist nach der S. 129 getroffenen Wahl der Achsen $\sqrt{g}$ an jeder Stelle imaginär, da hierfür die g_{ik} in die Werte (281) übergehen. Die $dX_1, \ldots.$ dagegen sind reell (vgl. S. 32). Wir wollen nun **annehmen**, daß auch die $dx_1, \ldots.$ für jedes System reell sind; wir haben damit die Koordinatenwahl begrenzt. dJ ist nun stets eine imaginäre Größe. Setzen wir jedoch von jetzt ab fest — wodurch unsere Ausführungen über den kovarianten und

kontravarianten Fundamentaltensor nicht berührt werden —, daß g den negativen Wert der Determinante bedeuten soll, also:

$$g = -|g_{ik}|, \tag{309}$$

so wird dJ reell. g kann sein Vorzeichen für keine Koordinatenwahl ändern.

Für spezielle Koordinatensysteme kann $\sqrt{g} = 1$ werden[1]. Abgesehen von dieser Einschränkung sind die g_{ik} immer noch beliebiger Änderungen fähig; es gibt also unendlich viele Koordinatensysteme dieser Art. Für alle solche Systeme nehmen nun die Beziehungen der Relativitätstheorie besonders einfache Formen an. Es ist deshalb für viele Untersuchungen zweckmäßig, auf derartige Systeme zurückzugehen. Wir werden hier öfter von dieser Vereinfachung Gebrauch machen, da es sich hier darum handelt, einen Überblick über die Gesetzmäßigkeiten unserer Theorie zu gewinnen. Zuerst freilich müssen die Grundgesetze in völliger Allgemeinheit gewonnen werden. Dann aber wird die Spezialisierung des Systems uns rascher zu Ergebnissen führen, als die allgemeinen Gleichungen. Wieweit freilich diese Ergebnisse ganz allgemein gelten, wieweit sie sich auf unsere speziellere Koordinatenwahl erstrecken, kann nur von Fall zu Fall die weitere Untersuchung zeigen.

Wir wollen ferner die Gleichung der geodätischen Linie in unserem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum herleiten. Das Linienelement ds, der Abstand zweier benachbarter Raum-Zeit-Punkte P und P' (wir nehmen an, daß P' aus P durch eine Bewegung hervorgegangen ist), hat als Invariante einen vom Koordinatensystem unabhängigen Wert. Dasselbe gilt für die zwischen zwei festen Punkten P_1 und P_2 gezogene beliebige Weltlinie, deren Länge $\int_{P_1}^{P_2} ds$ beträgt. Definieren wir die geodätische Weltlinie als eine solche, für die die Länge einen Extremwert besitzt, für welche also:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0 \tag{310}$$

[1]) Dies bedeutet eine Beschränkung auf diejenigen Koordinatensysteme, für welche die Funktionaldeterminante 1 ist.

ist, so besteht auch die Gleichung (310) unabhängig vom Koordinatensystem. Die Gleichung (310) der geodätischen Linie führt nun auf vier totale Differentialgleichungen, die unabhängig von der besonderen Wahl des Koordinatensystems ebenfalls die geodätische Linie definieren.

Fassen wir die Bogenlänge L einer Raum-Zeit-Kurve als Funktion eines beliebigen Parameters t auf, der in den Punkten P_1 und P_2 die Werte a und b hat, so ist:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}\, dt = \int_a^b F dt, \tag{311}$$

wo:

$$F^2 = g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \tag{312}$$

gesetzt ist. Für die geodätische Linie ist also:

$$\int_a^b \delta F dt = 0. \tag{313}$$

Aus (312) ergibt sich, wenn man beachtet, daß $g_{ik} = g_{ki}$ ist:

$$2F\delta F = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \delta x_r + 2 g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \delta \left(\frac{dx_k}{dt} \right). \tag{314}$$

Nun wollen wir annehmen, daß der Parameter t die Bogenlänge s der Kurve sei. Dann ist $F = 1$, und wir erhalten:

$$\delta F = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_r + g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{d\delta x_k}{ds}. \tag{315}$$

Der zweite Teil des Integrals $\int_a^b \delta F ds$ lautet:

$$\int_a^b g_{ik} \frac{dx_i}{ds} d\delta x_k = \left[g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \delta x_k \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \right) ds\, \delta x_k. \tag{316}$$

Der erste Posten der rechten Seite verschwindet, da die Variationen δx_k in den Endpunkten der Kurve null sind. Aus (315) ergibt sich also:

$$(317)\qquad \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} \delta x_r - \frac{d}{ds}\left(g_{ik} \frac{dx_i}{ds}\right) \delta x_k \right\} ds = 0.$$

δx_r und δx_k sind willkürliche Variationen.

Wir können $\delta x_r = \delta x_k$ setzen, da in jedem Teil von (317) über die Indizes r bzw. k von 1 bis 4 zu summieren ist. Es folgt also aus (317):

$$(318)\qquad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{ir} \frac{dx_i}{ds}\right) = 0.$$

Wir haben damit vier Gleichungen ($r = 1, 2, 3, 4$) gewonnen, die wir noch weiter umformen wollen. Zunächst wird:

$$(319)\qquad g_{ir} \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Beachten wir, daß der zweite Summand sich wegen der über i und k vorzunehmenden Summation auch in der Form:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i}\right) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

schreiben läßt, und führen wir die Christoffelschen Dreiindizes-Symbole erster Art:

$$(320)\qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right)$$

ein, so lautet (319) jetzt:

$$(321)\qquad g_{mr} \frac{d^2 x_m}{ds^2} + \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Da weiter:

$$(322)\qquad g^{rt} g_{mr} \frac{d^2 x_m}{ds^2} = \delta_m^t \frac{d^2 x_m}{ds^2} = \frac{d^2 x_t}{ds^2},$$

so folgt, wenn wir die Christoffelschen Dreiindizes-Symbole zweiter Art:

$$(323)\qquad g^{rt} \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix}$$

benützen, schließlich als Gleichungssystem der geodätischen Linie:

$$(324)\qquad \frac{d^2 x_t}{ds^2} + \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Diese vier Gleichungen ($t = 1, 2, 3, 4$) behalten bei beliebigen

Koordinatentransformationen ihre Gestalt; sie bestehen unabhängig von der besonderen Wahl des Koordinatensystems. Die Größen $\left\{ {ik \atop t} \right\}$ bzw. $\left[{ik \atop r} \right]$ sind in i und k symmetrisch.

Nunmehr können wir zur Bildung neuer Tensoren durch Differentiation übergehen.

Durch φ sei ein Skalarfeld im Raum gegeben (vgl. S. 78). φ ist also an einer bestimmten Stelle invariant gegen jede beliebige Koordinatentransformation (275). Die Änderung $d\varphi$ beim Fortschreiten in einer bestimmten Raum-Zeit-Richtung ist ebenfalls invariant; ebenso auch $\psi = \frac{d\varphi}{ds}$. Nun ist aber:

(325) $$\psi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \varphi_i \frac{dx_i}{ds}.$$

$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ist also ein kovarianter Tensor I. Ranges, wie wir bereits S. 79 gezeigt hatten. Ferner ist aus denselben Gründen wie vorher $\frac{d\psi}{ds}$ eine Invariante.

Da:

(326) $$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{d^2 x_i}{ds^2}$$

ist, so können wir hieraus zunächst auf die Existenz eines Tensors nicht schließen.

Setzen wir nun aber fest: die Kurve, längs deren wir differenzieren, ist eine geodätische Linie, so ist:

$$\frac{d^2 x_t}{ds^2} = - \left\{ {ik \atop t} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds};$$

also wird:

(327) $$\frac{d\psi}{ds} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ {ik \atop t} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}.$$

Hieraus ergibt sich, daß:

(328) $$\psi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ {ik \atop t} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ {ik \atop t} \right\} \varphi_t$$

ein kovarianter Tensor II. Ranges ist, der aus den Kompo-

nenten des Tensors I. Ranges $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ nach (328) zusammengesetzt wird. ψ_{ik} ist in i und k symmetrisch. Die Annahme, daß wir längs einer geodätischen Linie differenzieren sollen, bedeutet für unsere Beziehung (328) keine Beschränkung. Denn wir können von einem Punkt zu jedem benachbarten auf einer geodätischen Linie fortschreiten. Unser Bildungsgesetz, das nun allerdings nicht mehr die einfache Form wie das der speziellen Relativitätstheorie (vgl. S. 79) besitzt, ist also beliebig anwendbar. Es besteht für jede Koordinatentransformation, ist also allgemein invariant.

Wir hatten bei der Herleitung von (328) die Annahme gemacht, daß der Tensor φ_i als Gradient eines Skalars, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, darstellbar ist. Das Bildungsgesetz (328) besteht aber für jeden beliebigen Tensor I. Ranges.

Der Beweis ist folgendermaßen zu erbringen. Sind μ und ν Skalare, so ist $\mu \frac{d\nu}{\partial x_i}$ ein kovarianter Tensor I. Ranges. Dasselbe gilt auch für:

$$S_i = \mu_{(1)} \frac{\partial \nu_{(1)}}{\partial x_i} + \mu_{(2)} \frac{\partial \nu_{(2)}}{\partial x_i} + \mu_{(3)} \frac{\partial \nu_{(3)}}{\partial x_i} + \mu_{(4)} \frac{\partial \nu_{(4)}}{\partial x_i}, \tag{329}$$

wo $\mu_{(1)}$, $\nu_{(1)}$, ... wieder Skalare sind.

Jeder beliebige Tensor I. Ranges mit den Komponenten φ_i, die Funktionen der x_i sind, läßt sich aber in die Form (329) bringen. Man braucht nur:

$$\begin{matrix} \mu_{(1)} = \varphi_1, & \mu_{(2)} = \varphi_2, & \mu_{(3)} = \varphi_3, & \mu_{(4)} = \varphi_4 \\ \nu_{(1)} = x_1, & \nu_{(2)} = x_2, & \nu_{(3)} = x_3, & \nu_{(4)} = x_4 \end{matrix} \tag{330}$$

zu setzen.

Soll also jeder beliebige Tensor I. Ranges φ_i durch:

$$\psi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ t \end{matrix} \right\} \varphi_t \tag{331}$$

zu dem Tensor II. Ranges ψ_{ik} führen, so genügt es, den Beweis für S_i, oder noch einfacher für $\mu \frac{\partial \nu}{\partial x_i}$, zu erbringen. Nun ist aber nach (328):

$$\mu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i \partial x_k} - \mu \left\{ \begin{matrix} ik \\ t \end{matrix} \right\} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}$$

ein Tensor II. Ranges; ebenso auch:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \nu}{\partial x_k}.$$

Die Addition beider Tensoren ergibt den Tensor:

$$\text{(331')} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu \frac{\partial \nu}{\partial x_i}\right) - \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \left(\mu \frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right).$$

Der Vergleich mit (331) zeigt, daß diese Beziehung in der Tat für jeden beliebigen kovarianten Tensor I. Ranges φ_i anwendbar ist.

Mit der Gleichung (331) ist nur eine der Beziehungen hergeleitet, die in einer für beliebige Koordinatensysteme geltenden Form zeigen, in welcher Weise wir durch Differentiation Tensoren höheren Ranges entwickeln können. Im folgenden seien noch einige weitere solche Bildungsgesetze zusammengestellt, die später noch gebraucht werden. Auf ihre Ableitung muß verzichtet werden. Es sei vielmehr auf das Lehrbuch von H. Weyl: „Raum, Zeit, Materie" verwiesen, oder auf A. Einstein: „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie".

Beachtet man, daß die Indizes den Charakter der Tensoren bezeichnen, so sind die nachfolgenden Gleichungen ohne weiteres verständlich. Es ist:

$$\text{(332)} \qquad \psi_k^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} kt \\ i \end{Bmatrix} \varphi^t$$

$$\text{(333)} \qquad \psi_{kl}^i = \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial x_l} + \begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix} \varphi_k^t - \begin{Bmatrix} kl \\ t \end{Bmatrix} \varphi_t^i$$

$$\text{(334)} \qquad \psi_l^{ik} = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_l} + \begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix} \varphi^{tk} + \begin{Bmatrix} lt \\ k \end{Bmatrix} \varphi^{it}.$$

Eine weitere Gruppe von Gleichungen, deren Ableitung ebenfalls hier nicht gegeben werden soll, stellt Beziehungen zwischen den Koeffizienten g_{ik} des Fundamentaltensors dar. Die dabei auftretende Größe g ist wieder durch (309) definiert. Die Beziehungen lauten:

$$\text{(335)} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_r} = \tfrac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = -\tfrac{1}{2} g_{ik} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r}$$

$$\text{(336)} \qquad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = -g^{is} g^{kt} \frac{\partial g_{st}}{\partial x_r}$$

$$\text{(337)} \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = -g_{is} g_{kt} \frac{\partial g^{st}}{\partial x_r}$$

(338) $$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = -\left(g^{is}\begin{Bmatrix} s r \\ k \end{Bmatrix} + g^{ks}\begin{Bmatrix} s r \\ i \end{Bmatrix}\right)$$

(339) $$\begin{Bmatrix} k r \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_r}.$$

Wir setzen schließlich noch zwei Gruppen von Gleichungen hierher, die durch Verjüngung aus (333) und (334) gewonnen sind, und welche Tensoren II. Ranges auf solche I. Ranges zurückzuführen gestatten. Die Gleichungen sind:

(340) $$\psi_i = \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} k t \\ k \end{Bmatrix}\varphi_i^t - \begin{Bmatrix} i k \\ t \end{Bmatrix}\varphi_t^k$$

(341) $$\psi^i = \frac{\partial \varphi^{ki}}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} k t \\ k \end{Bmatrix}\varphi^{ti} + \begin{Bmatrix} k t \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{kt}$$

oder:

(342) $$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi_i^k)}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i r \\ s \end{Bmatrix}\varphi_s^r$$

(343) $$\psi^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^{ki})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix}\varphi^{rs}.$$

Die Gleichung (332) führt durch Verjüngung zu dem Skalar:

(344) $$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} i t \\ i \end{Bmatrix}\varphi^t \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i}.$$

Wir wollen jetzt, ausgehend von den soeben gegebenen Differentialbeziehungen, die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie entwickeln. In der speziellen Relativitätstheorie war nach (166) $F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ als Differenz zweier Tensoren II. Ranges mit vertauschten Indizes ein antisymmetrischer Tensor. Einen entsprechenden Tensor erhalten wir in der allgemeinen Theorie (d. h. als Beziehung, die für beliebige Koordinatentransformationen invariant ist), indem wir die Differenz bilden:

(345) $$F_{ik} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r\right) - \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \begin{Bmatrix} k i \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r\right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

F_{ik} erhält also dieselbe Form wie vorher. Demnach gilt auch in der allgemeinen Relativitätstheorie wieder entsprechend (167) bzw. (188) die Beziehung:

(346) $$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Dagegen sind für die Transformation von kovarianten Tensoren in kontravariante und umgekehrt mit Hilfe des (kovarianten oder kontravarianten) Fundamentaltensors die allgemeinen Beziehungen (vgl. S. 78):

$$a_i = g_{ik}\, a^k; \qquad a^i = g^{ik}\, a_k,$$
$$a_{ik} = g_{il}\, g_{km}\, a^{lm}; \qquad a^{ik} = g^{il}\, g^{km}\, a_{lm} \tag{347}$$

und ähnliche anzuwenden.

Auch ist für die Bildung der (168) entsprechenden Gleichung zu beachten, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}$ kein kontravarianter Vektor mehr wie früher (vgl. S. 79) ist. Wir müssen jetzt vielmehr auf (341) zurückgreifen. Ist dort φ^{ik} ein antisymmetrischer Tensor, so ist der letzte Posten der rechten Seite null. Denn $\left\{ \begin{matrix} k\,t \\ i \end{matrix} \right\}$ ist symmetrisch, φ^{kt} antisymmetrisch, bei der Summation des Produkts beider über alle k und t heben sich je zwei Posten weg. Beachten wir noch (339), so läßt sich aus einem antisymmetrischen Tensor II. Ranges ein Tensor I. Ranges auf folgende Weise bilden:

$$\psi^i = \frac{\partial \varphi^{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_r} \varphi^{ir} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(\sqrt{g}\, \varphi^{ik}\right)}{\partial x_k}. \tag{348}$$

Wir erhalten also an Stelle von (168) bzw. (187) in der allgemeinen Relativitätstheorie die Beziehung:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(\sqrt{g}\, F^{ik}\right)}{\partial x_k} = s^i. \tag{349}$$

In (346) und (349) haben wir die beiden Gleichungen gewonnen, die in der speziellen Relativitätstheorie mit den Maxwellschen Feldgleichungen identisch waren. Beide Gleichungen sind gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen invariant, sie stellen also eine Erweiterung der Feldgleichungen der Elektrodynamik für Vorgänge im Gravitationsfeld dar. Sobald wir rein elektrische Vorgänge betrachten, ein Gravitationsfeld also nicht annehmen, ist $\sqrt{g}$ konstant; (349) geht also in (187) über[1]).

[1]) Beim Vergleich mit den in § 8 hergeleiteten Formeln ist zu beachten, daß dort die Vorzeichen der Koeffizienten des speziellen Fundamentaltensors (159) denen des Linienelements (276) entgegengesetzt sind. Nach der S. 129 getroffenen neuen Festsetzung ist der S. 78 gegebene Zu-

Unsere Gleichung:

$$-p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x_k}, \tag{202}$$

sowie das dynamische Grundgesetz:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{226}$$

sind nun noch in der allgemeinen Relativitätstheorie durch neue Gleichungen zu ersetzen, die allgemein invariant sein müssen. Sie ergeben sich sofort aus der für beliebige Tensoren geltenden Gleichung (341). Berücksichtigt man die Symmetrie von S^{ik}, sowie die bei (348) ausgeführte Umrechnung, so wird:

$$-p^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, S^{ik})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix} S^{rs}. \tag{350}$$

Übertragen wir die S. 97 durchgeführten Überlegungen auf unseren allgemeinen Fall, so lauten die vier **Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie**:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T^{ik})}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix} T^{rs} = 0. \tag{351}$$

Diese Gleichung besteht für jedes beliebige Koordinatensystem. Sie stellt eine Erweiterung des Energie-Impuls-Satzes für das Gravitationsfeld dar[1]). Sie geht in die entsprechende Gleichung (226) der speziellen Relativitätstheorie über, sobald kein Gravitationsfeld vorhanden ist. Denn dann sind die g_{ik} konstant, $\sqrt{g}$ ebenso, und der zweite Posten von (351) verschwindet.

Wären wir statt von (341) von (340) ausgegangen, so hätten sich die Grundgleichungen in der Form ergeben:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T_i^k)}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i r \\ s \end{Bmatrix} T_s^r = 0. \tag{352}$$

---

sammenhang zwischen den kovarianten und kontravarianten Tensoren nicht mehr zutreffend. Doch wollen wir festsetzen, daß φ_i, F_{ik}, p^i, s^i, S^{ik} ihr Zeichen behalten. p_i und S_k^i z. B. nehmen dann entgegengesetzte Zeichen wie früher an. Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Kap. IV.

[1]) Vgl. hierzu A. Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1918. S. 448. Siehe auch die Ausführungen im folgenden § 13.

In ihrer allgemeinen Form beschreiben die Gleichungen (351) oder (352) alle elektromagnetischen oder mechanischen Bewegungsvorgänge im Gravitationsfeld.

Wir müssen nur die Tensorkomponenten T_{ik} oder T_i^k durch ihre jeweils für den Vorgang zu wählenden Werte ersetzen; für die Elektrodynamik durch (198); für die Mechanik durch die (231) entsprechenden Beziehungen.

Es sei hier noch bemerkt, daß wir die dynamischen Grundgleichungen auf ein Hamiltonsches Prinzip zurückführen können[1]).

§ 13. Die Einsteinsche Gravitationstheorie.

Wir wollen uns nun der Bewegung eines Massenpunktes in der allgemeinen Relativitätstheorie zuwenden. Wir beschränken uns zunächst auf alle Koordinatensysteme, für welche $\sqrt{g} = 1$ ist.

Zufolge (229) setzen wir den kontravarianten Energie-Impuls-Tensor eines sich bewegenden Massenpunktes:

(353) $$T^{ik} = m\, u^i\, u^k.$$

$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, T^{ik})}{\partial x_k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k}$ geht dann nach der S. 99 gegebenen Ableitung in $m \frac{d u^i}{d s}$ über, und unsere Grundgleichungen (351) nehmen die Form an:

(354) $$m \frac{d u^i}{d s} = - \begin{Bmatrix} r\, s \\ i \end{Bmatrix} T^{rs} = - m \begin{Bmatrix} r\, s \\ i \end{Bmatrix} u^r u^s,$$

oder:

(355) $$\frac{d u^i}{d s} = - \begin{Bmatrix} r\, s \\ i \end{Bmatrix} u^r u^s.$$

Diese Gleichung ist aber völlig identisch mit der Gleichung (324) der geodätischen Linie. Sie ist nicht nur invariant für alle Koordinatensysteme, für die $\sqrt{g} = 1$ ist, sondern für alle beliebigen Koordinatensysteme. Wir haben mit dem Bewegungsgesetz (355) ein für den Massenpunkt allgemein invariantes Gesetz gefunden.

[1]) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. § 27. Der Energie-Impuls-Tensor.

Es sagt aus: jeder sich selbst überlassene Massenpunkt beschreibt in einem beliebig bewegten Koordinatensystem oder dem entsprechenden Gravitationsfeld eine geodätische Raum-Zeitlinie. Oder: die Weltlinie eines sich bewegenden Massenpunktes ist eine geodätische Linie.

Wir haben so eine Verallgemeinerung des Galileischen Trägheitsgesetzes gewonnen, wonach ein freier Massenpunkt sich im gravitationslosen Raum geradlinig und gleichförmig bewegt.

Die durch das Gravitationsfeld auf einen Massenpunkt ausgeübte Kraft $p^i = m \frac{du^i}{ds}$ hat die Form:

(356) $$p^i = -\left\{ {rs \atop i} \right\} T^{rs} = -m \left\{ {rs \atop i} \right\} u^i u^k.$$

Die wirkende Kraft besteht aus zweierlei Faktoren; der erste $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ hängt nur vom Gravitationsfeld, der zweite von der Materie ab. Die Kraft ist proportional der Masse; die Beschleunigung also unabhängig von der Masse, wie es der Gravitationskraft erfahrungsgemäß entspricht. Für ein lokales Koordinatensystem sind alle Faktoren $\left\{ {rs \atop i} \right\} = 0$ (vgl. S. 146); die Punktbewegung ist die Galileische. Kräfte wirken im gravitationsfreien System nicht. Die Gleichung (354) steht also mit den bisher aufgestellten Gesetzmäßigkeiten der Punktbewegung in Übereinstimmung. Sie ist jedoch viel allgemeiner als das Newtonsche Grundgesetz, da sie die Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß von Trägheit und Schwere in jedem beliebigen Koordinatensystem wiedergibt.

Hervorzuheben ist die Analogie der Gleichung (356) mit der Gleichung (194) für die ponderomotorische Kraft des elektromagnetischen Feldes, die unter Beachtung der S. 152 getroffenen Annahme über die Vorzeichen lautet:

(357) $$p^i = -F^i_k s^k.$$

Die F^i_k hängen nur vom elektromagnetischen Feld ab, die s^k stellen die bewegte Elektrizität dar. Die Feldkomponenten F^i_k sind durch Differentiation des elektromagnetischen Potentials φ_i ent-

standen (vgl. S. 83). Ebenso sind die Komponenten des Gravitationsfeldes[1]):

(358) $$\begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{rs}$$

nach (323) aus den Differentialquotienten der g_{ik} gebildet. Wir bezeichnen deshalb die 10 Tensorgrößen g_{ik} als das Potential des metrischen oder Gravitationsfeldes. Diese Bezeichnung wird sich bei dem später durchzuführenden Vergleich mit der Newtonschen Theorie als besonders berechtigt erweisen (vgl. auch S. 132).

Die Bewegung eines Punktes im Gravitationsfeld einer Masse (z. B. eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne) ist nun nach (355) dann vollständig beschrieben, wenn es gelingt, die Gravitationspotentiale g_{ik} aus der Masse herzuleiten. Die allgemeine Relativitätstheorie stellt also die Forderung, allgemein invariante Gleichungen (Gravitationsgleichungen) zwischen den g_{ik} und der Masse aufzustellen und führt dadurch zu einer Theorie der Gravitation.

Einstein greift bei der Aufstellung seiner Gravitationstheorie auf die Poissonsche Gleichung:

(359) $$\Delta \Phi = 4 \pi k \mu$$

zurück, wo Φ das Gravitationspotential der klassischen Mechanik, μ die Massendichte, k die Newtonsche Gravitationskonstante bedeutet. Die Gleichung (359) stellt den Zusammenhang zwischen Gravitationspotential und Materie in der Newtonschen Mechanik dar. Eine entsprechende Beziehung ist für die allgemeine Relativitätstheorie aufzustellen.

Die Materie ist hier nach (229) durch den Energie-Impuls-Tensor $T^{ik} = \mu_0 u^i u^k$ charakterisiert. Wir werden diesen Tensor zu einem von den g_{ik} abhängigen Tensor in Beziehung zu setzen haben. Eine Gleichsetzung von allgemeinen Tensorkomponenten erfüllt sofort unsere aufgestellte Invarianzbedingung. Nun gibt es in der Differentialgeometrie einen Tensor II. Ranges, der aus den

[1]) Die Größe Γ^i_{rs} hat in der allgemeinen Relativitätstheorie keinen Tensorcharakter, da auch die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}$, aus denen sie zusammengesetzt ist, einen solchen nicht besitzen (vgl. S. 79).

g_{ik} in ähnlicher Weise aufgebaut ist, wie $\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ in der Poissonschen Gleichung aus Φ. Er lautet:

$$(360)\quad R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r\,s \\ s \end{Bmatrix}.$$

Er wird als der Riemann-Christoffelsche Tensor (oder Krümmungstensor) bezeichnet. Durch Verjüngung führt er auf die invariante Krümmung:

$$(361)\quad R = g^{ik} R_{ik}.$$

Beschränken wir uns auf Koordinatensysteme, für welche $\sqrt{g} = 1$ ist, so geht (360) wegen (339) in:

$$(362)\quad R_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,r \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\,s \\ r \end{Bmatrix}$$

über.

Man könnte nun, wie dies Einstein zuerst getan hat[1]), die Gravitationsgleichungen in der Form:

$$(363)\quad R_{ik} = -\varkappa T_{ik}$$

ansetzen. Dann müßte aber R_{ik} an Stelle von T_{ik} in die Grundgleichung (351) eingeführt, diese erfüllen. Letzteres ist jedoch nicht der Fall; (363) ist also zu verwerfen. Wir werden sofort zeigen, daß die Gleichung (363) durch eine andere zu ersetzen ist, damit die invariante Gleichung (351) befriedigt wird. Wir beschränken uns dabei auf solche Koordinatensysteme, für die $\sqrt{g} = 1$ ist[2]).

Zuerst sind einige Vorbereitungen notwendig.

In der klassischen Mechanik reduziert sich die Poissonsche Gleichung für das Potential im Fall, daß an einer Stelle des Raumes Materie nicht selbst vorhanden ist, auf die Laplacesche Gleichung:

$$(364)\quad \Delta \varphi = 0.$$

[1]) Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1915. S. 778 u. 799.

[2]) A. Einstein, Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1915. S. 844. Der allgemeine Beweis ist von Einstein in der Arbeit: Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1916. S. 1111 gegeben. (Abdruck in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 3. Aufl. Leipzig 1920.) Vgl. auch H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Kap. IV.

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist der Tensor T_{ik} an solchen Stellen in allen Komponenten null. Nach (363) wäre die (364) entsprechende Gleichung:

(365) $$R_{ik} = 0 .$$

Dieser Ansatz ist mit der Grundgleichung (351) vereinbar. **Einstein** geht von ihm bei seiner Gravitationstheorie aus und bezeichnet die 10 Gleichungen (365) als die **Feldgleichungen der Gravitation bei Abwesenheit von Materie.**

Wir wollen diese Gleichungen zunächst in eine andere Form bringen. Wir können sie nach (358) schreiben:

(366) $$\frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x_r} = \Gamma^s_{ir} \Gamma^r_{ks} .$$

Nun führt das **Hamiltonsche Prinzip**:

(367) $$\delta \int H \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 = 0$$

auf die Gleichungen[1]):

(368) $$\frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} = 0 ,$$

wobei:

(369) $$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} = g^{ik}_r$$

gesetzt wurde. Wir wollen zeigen, daß die Gleichungen (368) mit den Gleichungen (366) identisch sind, wenn wir:

(370) $$H = g^{ik} \Gamma^r_{is} \Gamma^s_{kr}$$

setzen. **Die Gravitationsgleichungen sind also auf ein Hamiltonsches Prinzip zurückführbar.** Es ist:

(371) $$\begin{aligned} \delta H &= \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r} \delta g^{ik}_r \\ &= \Gamma^r_{is} \Gamma^s_{kr} \delta g^{ik} + 2 g^{ik} \Gamma^r_{is} \delta \Gamma^s_{kr} \\ &= - \Gamma^r_{is} \Gamma^s_{kr} \delta g^{ik} + 2 \Gamma^r_{is} \delta \left(g^{ik} \Gamma^s_{kr} \right), \end{aligned}$$

wobei im zweiten Glied die Indizes, über die zu summieren ist, teilweise vertauscht worden sind.

In:

$$2 \Gamma^r_{is} \delta \left(g^{ik} \Gamma^s_{kr} \right) = \Gamma^r_{is} \delta \left(g^{ik} g^{sh} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{rh}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kr}}{\partial x_h} \right) \right)$$

[1]) Enzyklopädie d. math. Wissenschaften. Bd. II. 1. S. 615.

heben sich nun die beiden letzten Glieder weg, da das letzte Glied bei Vertauschung von h und k, sowie i und s dem vorletzten gleich wird. Unter Berücksichtigung von (336) geht dann (371) über in:

$$\delta H = -\Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kr}\,\delta g^{ik} - \Gamma^r_{is}\,\delta g^{is}_r. \tag{372}$$

Demnach ist:

$$\frac{\partial H}{\partial g^{ik}} = -\Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kr}; \qquad \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r} = -\Gamma^r_{ik}, \tag{373}$$

und beim Einsetzen dieser Werte geht (368) in (366) über.

Wir können den Gravitationsgleichungen (366) jetzt noch eine dritte Form geben. Wir multiplizieren (368) mit g^{ik}_l und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ik}_l\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r}\frac{\partial g^{ik}_r}{\partial x_l} - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

wobei:

$$\frac{\partial g^{ik}_l}{\partial x_r} = \frac{\partial g^{ik}_r}{\partial x_l}$$

gesetzt ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ik}_l\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_l} = 0. \tag{374}$$

Setzen wir:

$$-2\varkappa t^r_l = g^{ik}_l\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_r} - \delta^r_l H, \tag{375}$$

so geht (374) über in:

$$\frac{\partial t^r_l}{\partial x_r} = 0. \tag{376}$$

Diese Beziehung tritt an Stelle von (366).

Berücksichtigt man die Werte (373) und (370) und beachtet außerdem die Gleichung (338), so kann man an Stelle von (375) die folgende Beziehung setzen:

$$\varkappa t^r_l = \tfrac{1}{2}\,\delta^r_l\, g^{ik}\Gamma^n_{is}\Gamma^s_{kn} - g^{ik}\Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kl}. \tag{377}$$

Die t^r_l hängen nur von den Komponenten des Gravitationsfeldes ab. Sie erfüllen die Gleichungen (376), die vollständig mit dem Energie-Impuls-Satz (226) der speziellen Relativitätstheorie übereinstimmt. Deshalb ist für die t^r_l die Bezeichnung Energie-

komponenten des Gravitationsfeldes berechtigt. Jedoch sind die t_l^r keine Tensorkomponenten, wie sich aus der Definitionsgleichung (377) und der Anmerkung S. 155 zu den Γ_{rs}^i ergibt.

Wir leiten nun eine vierte Form der Gravitationsgleichungen her. Wir multiplizieren die Gravitationsgleichungen (366) mit g^{kl} und summieren, bilden also den Ausdruck $R_i^l = 0$. Bei Benutzung von (338) wird hieraus:

$$(378)\qquad g^{kl}\frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{kl}\Gamma_{ik}^r\right) - \Gamma_{ik}^r\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{kl}\Gamma_{ik}^r\right) + g^{mk}\Gamma_{mr}^l\Gamma_{ik}^r + g^{ml}\Gamma_{mr}^k\Gamma_{ik}^r$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r\right) + g^{jk}\Gamma_{js}^l\Gamma_{ik}^s + g^{kl}\Gamma_{ks}^r\Gamma_{ir}^s$$

$$= g^{kl}\Gamma_{ir}^s\Gamma_{ks}^r;$$

oder:

$$(379)\qquad \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r\right) = -\,g^{jk}\Gamma_{js}^l\Gamma_{ik}^s.$$

Wir setzen nun:

$$(380)\qquad \varkappa t_i^l = \tfrac{1}{2}\,\delta_i^l g^{jk}\Gamma_{js}^n\Gamma_{kn}^s - g^{jk}\Gamma_{js}^l\Gamma_{ik}^s.$$

Die Verjüngung dieser Gleichung nach i und l ergibt[1]):

$$(381)\qquad \varkappa t_i^i = \varkappa t = 2g^{jk}\Gamma_{js}^n\Gamma_{kn}^s - g^{jk}\Gamma_{js}^n\Gamma_{kn}^s = g^{jk}\Gamma_{js}^n\Gamma_{kn}^s.$$

Aus (380) und (381) folgt:

$$\varkappa\left(t_i^l - \tfrac{1}{2}\,\delta_i^l t\right) = -\,g^{jk}\Gamma_{js}^n\Gamma_{ik}^s,$$

so daß unsere Gleichung (366) schließlich übergeht in:

$$(382)\qquad \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r\right) = \varkappa\left(t_i^l - \tfrac{1}{2}\,\delta_i^l t\right).$$

Wir haben damit eine weitere Form der Gravitationsgleichungen im materiefreien Raum gewonnen. Ist nun an einer Raumstelle Materie vorhanden, die durch den Energietensor T_{ik} gegeben ist, so können wir ihn zu R_{ik} dadurch in Beziehung setzen, daß wir an Stelle von (382) schreiben:

$$(383)\qquad \frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r\right) = \varkappa\left[\left(t_i^l + T_i^l\right) - \tfrac{1}{2}\,\delta_i^l\left(t + T\right)\right],$$

[1]) Die Verjüngung von δ_i^l liefert wegen der Summation den Betrag 4 [vgl. (305)].

wo T die Verjüngung von T_i^l bedeutet. Einstein begründet die Einführung der Summen der Komponenten der t_i^l und T_i^l in (383) folgendermaßen[1]). „Betrachtet man ein vollständiges System (z. B. das Sonnensystem), so wird die Gesamtmasse des Systems, also auch seine gesamte gravitierende Wirkung, von der Gesamtenergie des Systems, also von der ponderablen und Gravitationsenergie zusammen, abhängen. Dies wird sich dadurch ausdrücken lassen, daß man in (382) an Stelle der Energiekomponenten t_i^l des Gravitationsfeldes allein die Summen $t_i^l + T_i^l$ der Energiekomponenten von Materie und Gravitationsfeld einführt."

Beachten wir, daß wegen (378) die Gleichung (382) mit: $-R_i^l = 0$ identisch gesetzt werden kann, so läßt sich (383) in der Form schreiben:

(384) $$R_{ik} = -\varkappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T).$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (363) als die gesuchte Gravitationsgleichung, welche die g_{ik} als Funktion der Materie darstellt. Nach der hier gegebenen Ableitung besteht sie zwar nur als invariante Beziehung für alle Koordinatensysteme mit $\sqrt{g} = 1$, doch kann man ausgehend von einem erweiterten Hamiltonschen Prinzip zeigen, daß sie für beliebige Koordinatensysteme Gültigkeit hat (vgl. Anm. 2. S. 156).

Wir müssen nunmehr den Beweis erbringen, daß die Gleichung (384) sich mit der Grundgleichung (351) der allgemeinen Relativitätstheorie, d. h. mit dem erweiterten Energie-Impulssatz, in Einklang befindet. Wir gehen hierbei auf (383) zurück. Die Verjüngung nach i und l ergibt:

(385) $$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{mn}\Gamma_{mn}^r\right) = -\varkappa(t + T);$$

also folgt aus (383) und (385):

(386) $$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r - \tfrac{1}{2}\delta_i^l g^{mn}\Gamma_{mn}^r\right) = \varkappa\left(t_i^l + T_i^l\right).$$

Wir wollen nun (386) nach x_l differenzieren und zeigen, daß die linke Seite identisch null wird. Wir bilden:

(387) $$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln}\Gamma_{in}^r\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left[g^{ln} g^{ro}\left(\frac{\partial g_{io}}{\partial x_n} + \frac{\partial g_{no}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{in}}{\partial x_o}\right)\right].$$

[1]) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig 1916. S. 47.

Vertauschen wir bei der Summation über r, l, n, o im dritten Posten der rechten Seite r und l bzw. n und o, so wird er dem ersten entgegengesetzt gleich. Demnach ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln} \Gamma^r_{in}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left[g^{ln} g^{or} \frac{\partial g_{no}}{\partial x_i}\right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 g^{nr}}{\partial x_r \partial x_n \partial x_i}. \tag{388}$$

Hierbei ist die Beziehung (336) herangezogen und bei der Summation der Buchstabe l durch n ersetzt.

Ferner ist:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(\delta^l_i g^{mn} \Gamma^r_{mn}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_i}\left(g^{mn} \Gamma^r_{mn}\right)$$
$$-\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_i}\left[g^{mn} g^{rp}\left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial x_n} + \frac{\partial g_{np}}{\partial x_m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x_p}\right)\right]. \tag{389}$$

Der letzte Posten der rechten Seite verschwindet wegen (335) bei der Annahme $\sqrt{g} = 1$. Die beiden anderen lassen sich, da über m und n zu summieren ist, zusammenfassen, und es folgt mit Rücksicht auf (336):

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(\delta^l_i g^{mn} \Gamma^r_{mn}\right) = +\frac{1}{2} \frac{\partial^3 g^{nr}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_n}. \tag{390}$$

Die Zusammenfassung von (388) und (390) führt auf:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_l}\left(g^{ln} \Gamma^r_{in} - \frac{1}{2} \delta^l_i g^{mn} \Gamma^r_{mn}\right) = 0. \tag{391}$$

Demnach ist nach (386):

$$\frac{\partial\left(t^l_i + T^l_i\right)}{\partial x_l} = 0. \tag{392}$$

Vergleichen wir diese aus (383) hervorgegangene Gleichung mit der Grundgleichung (226) der speziellen Relativitätstheorie, so zeigt sich, daß an jeder Stelle des Raumes die Erhaltungssätze der Energie und des Impulses noch gelten, wenn wir neben den Komponenten des Energie-Tensors der Materie Energiekomponenten des Gravitationsfeldes einführen. Die Erhaltungssätze gelten dann für die Summe beider Energiekomponenten[1]).

Mit Hilfe von (392) können wir (384) auf die Grundgleichung (352) der allgemeinen Relativitätstheorie zurückführen.

[1]) Für die hier auftretenden Fragen vgl. A. Einstein, Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitz.-Ber. d. preuß. Akad. d. W. 1918. S. 448. Siehe auch S. 152.

Wir wollen die Gleichung (384) mit g^{ik}_m multiplizieren:

$$(393) \qquad -g^{ik}_m \frac{\partial \Gamma^r_{ik}}{\partial x_r} + g^{ik}_m \Gamma^s_{ir} \Gamma^r_{ks} = -\varkappa g^{ik}_m T_{ik} + \tfrac{1}{2} \varkappa g^{ik}_m g_{ik} T.$$

Der letzte Posten der rechten Seite ist bei der Annahme $\sqrt{g} = 1$ wegen (335) null.

Die linke Seite können wir in die Form $\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l}$ bringen. Aus:

$$(375) \qquad 2\varkappa t^l_m = \delta^l_m H - g^{ik}_m \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l}$$

folgt nämlich:

$$(394) \qquad 2\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} = \frac{\partial H}{\partial x_m} - g^{ik}_{ml} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \frac{\partial g^{ik}_m}{\partial x_l}.$$

Beachtet man, daß:

$$(395) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_m} = \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} g^{ik}_m + \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l} \frac{\partial g^{ik}_l}{\partial x_m}$$

ist, so wird:

$$(396) \qquad 2\varkappa \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} = -g^{ik}_m \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{ik}_l}\right) + \frac{\partial H}{\partial g^{ik}} g^{ik}_m$$

$$= + g^{ik}_m \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_l} - \Gamma^n_{is} \Gamma^s_{kn}\right).$$

Die Gleichung (393) führt demnach auf:

$$(397) \qquad \frac{\partial t^l_m}{\partial x_l} - \tfrac{1}{2} g^{ik}_m T_{ik} = 0,$$

oder wegen (392) auf:

$$(398) \qquad \frac{\partial T^l_m}{\partial x_l} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_m} T_{ik} = 0.$$

Diese letztere Gleichung ist aber, wie noch eine einfache Umrechnung zeigt, mit der Grundgleichung (352) identisch.

Nach (338) ist:

$$(399) \qquad \tfrac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_m} T_{ik} = -\tfrac{1}{2}\left(g^{ir} \Gamma^k_{rm} + g^{kr} \Gamma^i_{rm}\right) T_{ik}$$

$$= -g^{ir} \Gamma^k_{rm} T_{ik} = -\Gamma^k_{rm} T^r_k.$$

(398) nimmt also die Form an:

$$(400) \qquad \frac{\partial T^l_m}{\partial x_l} - \begin{Bmatrix} m\,r \\ s \end{Bmatrix} T^r_s = 0.$$

Damit haben wir ausgehend von der Gravitationsgleichung (383)

die Grundgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie in der Form (352) hergeleitet.

Die Einsteinschen Gravitationsgleichungen (384) stehen also mit den Grundgleichungen (351) bzw. (352) der allgemeinen Relativitätstheorie in Übereinstimmung. Sie gründen sich also in letzter Linie auf die Sätze der Erhaltung von Energie und Impuls, die das Fundament unserer in Elektrizität und Mechanik hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten bildeten. Der Beweis hierfür läßt sich auch, wie schon S. 156 hervorgehoben wurde, für beliebige Koordinatensysteme (unabhängig von der Beschränkung $\sqrt{g} = 1$) erbringen.

In dieser Übereinstimmung liegt zunächst der Nachweis für die Berechtigung der aufgestellten Gravitationsgleichungen, die an sich natürlich etwas durchaus Willkürliches sind. Ihre eigentliche Berechtigung erhalten sie erst dadurch, daß es gelingt, die beobachteten Erscheinungen durch sie darzustellen. Wir werden uns damit im folgenden Paragraphen beschäftigen.

Wir wollen nun den Gravitationsgleichungen (384) noch eine andere Form geben. Wir multiplizieren diese Gleichung mit g^{ik} und verjüngen.

Dann ist:

$$R = -\varkappa(T - 2T),$$

oder:

(401) $$R = \varkappa T.$$

(384) geht dann über in:

(402) $$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}.$$

Die beiden Gleichungen (384) und (402) wollen wir als die Einsteinschen Gravitationsgleichungen I. Art bezeichnen. Sie geben den Potentialtensor der Gravitation als Funktion des Tensors der Materie. Doch ist damit die Einsteinsche Gravitationstheorie nicht abgeschlossen.

Wir können die Gravitationsgleichungen noch durch allgemeinere ersetzen.

Die invariante Krümmung R in Gleichung (361) ist nicht die allgemeinste aus den g_{ik} und ihren Ableitungen zusammengesetzte Invariante; dies ist vielmehr der Ausdruck:

(403) $$R' = \alpha R + \beta = \alpha g^{ik} R_{ik} + \beta,$$

wobei α und β Konstanten sind. Wir können R' auch in der Form:

$$R' = g^{ik}(R_{ik} - \lambda g_{ik}) \tag{404}$$

schreiben (λ = konst.), also unsere Gravitationsgleichungen dadurch erweitern, daß wir an Stelle von R_{ik} den Tensor $R_{ik} - \lambda g_{ik}$ setzen.

Die erweiterten Einsteinschen Gravitationsgleichungen[1]) (wir wollen sie zum Unterschied von (384) und (402) als die Gravitationsgleichungen II. Art bezeichnen) lauten dann:

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T)\,. \tag{405}$$

Diese Gravitationsgleichungen befinden sich ebenfalls mit der Grundgleichung (351) bzw. (352) der allgemeinen Relativitätstheorie in Übereinstimmung. Der Beweis hierfür soll jedoch nicht erbracht werden[2]).

Wir wollen auch die Gleichungen (405) noch in eine andere Form bringen. Wir bilden durch Multiplikation mit g^{ik} und Addition die skalare Gleichung:

$$R - 4\lambda = -\varkappa(T - 2T) = \varkappa T\,. \tag{406}$$

Diese Gleichung, mit (405) zusammengefaßt, ergibt die Gravitationsgleichungen II. Art in der zweiten Form:

$$(R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R) + \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}\,. \tag{407}$$

Wir können in diesen Gleichungen die universelle Konstante λ durch eine andere Größe ersetzen. Ist an einer Stelle weder Materie noch elektromagnetische Energie vorhanden, so ist in (406) $T = 0$ zu setzen. Demnach wird:

$$\lambda = \frac{R_0}{4}, \tag{408}$$

wenn wir mit R_0 die skalare Krümmung an einer solchen Stelle bezeichnen.

R_0 ist also ebenfalls eine universelle Konstante. Setzen wir den Wert (408) für λ in (407) ein, so geht diese Gleichung über in:

$$(R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R) + \tfrac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa T_{ik}\,. \tag{409}$$

---

[1]) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1917. S. 142. Abdruck in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 3. Aufl. Leipzig 1920.

[2]) Siehe a. a. O. S. 151.

Ist $\lambda = \frac{R_0}{4} = 0$, so gehen die Gravitationsgleichungen II. Art in die I. Art über.

Ausgehend von der Konstanz von R_0 hat nun Einstein noch einmal andere Gravitationsgleichungen aufgestellt[1]), die wir diejenigen III. Art nennen wollen. Sie lauten:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{4} g_{ik} R = - \varkappa T_{ik}. \tag{410}$$

Wir wollen zeigen, daß sie im Prinzip mit denen II. Art identisch sind.

Für (410) können wir schreiben:

$$(R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R) + \tfrac{1}{4} g_{ik} R_0 = - \varkappa \left(T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0] \right). \tag{411}$$

Die Gleichung (411) ist von (409) nur dadurch verschieden, daß an Stelle des Tensors T_{ik} der Materie der von der skalaren Krümmung abhängende Tensor $T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]$ tritt. Führen wir hierfür eine neue Bezeichnung ein, so herrscht völlige Übereinstimmung. Die universelle Konstante λ ist in (410) verschwunden; es besteht dafür die Bedingung, daß für $T_{ik} = 0$ die skalare Krümmung R nicht, wie bei den Gravitationsgleichungen I. Art, null wird, sondern in den konstanten Wert R_0 übergehen soll.

Die Gravitationsgleichungen I. Art sind also von denen II. (bzw. III.) Art wesentlich verschieden. Wir müssen uns hiermit noch eingehender beschäftigen.

Wir können, wie wir im nächsten Paragraphen noch zeigen werden, für die Gravitationsgleichungen I. Art Lösungen unter der Voraussetzung finden, daß für ganz im Endlichen gelegene Massen die g_{ik} im räumlich Unendlichen bei geeigneter Koordinatenwahl in die Werte (281) übergehen. Es besteht also die Annahme, daß in sehr großer Entfernung von Massen die spezielle Relativitätstheorie gilt. Ob und wie weit die dadurch bestimmten g_{ik} spezielle Lösungen der Gravitationsgleichungen I. Art sind, soll hier nicht untersucht werden; auf jeden Fall sind solche Lösungen möglich.

[1]) A. Einstein, Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1919. S. 349. Abdruck wie in Note 1) auf voriger Seite.

Diese aus den Gravitationsgleichungen I. Art hervorgehenden g_{ik} haben die Eigenschaft, daß sie nur zum Teil durch die Materie bestimmt sind, zum größeren Teil aber durch die im Unendlichen festgelegten Werte (vgl. § 14).

Hiernach wäre also anzunehmen, daß die Geometrie unseres Raumes (und der Zeit) im ganzen die Euklidische ist; nur in der Nähe von Massen (bzw. des „Feldes") wird die Geometrie Nicht-euklidisch. Wir können auf Grund unserer Gravitationsgleichungen I. Art den Raum als quasi-Euklidisch bezeichnen. Denken wir uns alle Materie aus ihm entfernt, so bleibt ein Euklidischer Raum zurück. Die g_{ik} nehmen überall die Werte (281) an.

Dies steht aber in Widerspruch mit dem Relativitätsprinzip im allgemeinsten Sinn. Danach sollen die geometrischen Eigenschaften des Raumes allein durch die Materie festgelegt sein. Ohne Materie sollen wir nicht vom Raum sprechen dürfen. Alle räumlichen Eigenschaften bestehen nur in bezug auf die darin vorhandene Materie. Die g_{ik} sollen allein durch diese bestimmt sein.

Ein anderes kommt hinzu. Gilt in großer Entfernung von Massen oder in massefreien endlichen Räumen die spezielle Relativitätstheorie, so besitzt ein einziger Massenpunkt, den wir dahin verbringen, Trägheit; die spezielle Relativitätstheorie kennt träge Massen an und für sich, deren als „träge" bezeichnete Eigenschaft also unabhängig von anderen Massen besteht (vgl. S. 100ff.)[1]. Eine solche Masse würde einer Geschwindigkeitsänderung einen Widerstand entgegensetzen. Nach unserer allgemeinsten Auffassung der Relativität kann man aber von der Bewegung oder Änderung der Bewegung einer Masse gar nicht sprechen — ebensowenig wie von Rotation —, wenn nur diese eine Masse existiert. In der speziellen Relativitätstheorie ist noch eine Bewegung gegen ausgezeichnete Koordinatensysteme möglich, nämlich gegen die unendlich vielen zueinander geradlinig und gleichförmig bewegten Systeme, für die das Grundgesetz (226) gilt. Diese letztere Vorstellung ist in der allgemeinen Relativitätstheorie gefallen. Die

[1]) Vgl hierzu auch: A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Berl. Akad. d. Wiss. 1917. S. 142ff. (Abdruck in H. A. Lorentz, A. Einstein H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip. 3. Aufl. Leipzig 1920.)

Gravitationsgleichungen I. Art führen also auf eine Lösung, die dem allgemeinen Relativitätsprinzip widerspricht.

Erst die Gravitationsgleichungen II. (bzw. III.) Art erfüllen das Prinzip der allgemeinen Relativität völlig. Wir wollen den Beweis für die Gravitationsgleichungen II. Art (405) erbringen.

Wir zeigen zunächst, daß eine räumlich geschlossene Welt mit gleichmäßig verteilter, im Durchschnitt ruhender Materie mit diesen Gravitationsgleichungen vereinbar ist.

Beziehen wir uns auf das Koordinatensystem, in welchem die Materie im Durchschnitt ruht, so wird der Energie-Impuls-Tensor nach (229) dargestellt durch:

(412) $$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{matrix}$$

μ_0 ist hierbei die mittlere Dichte der Materie; sie sei in bezug auf Raum und Zeit konstant. Die Materie legt also ein statisches Gravitationsfeld fest. Die g_{ik}, die zu bestimmen unsere Aufgabe ist, sind von der Zeit unabhängig. Nehmen wir eine Trennung der Parameter nach Raum und Zeit vor, so können wir dem Linienelement die Form (298) geben; wir setzen also:

(413) $$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0\,.$$

Ferner kann zufolge der Bewegungsgleichung (355) ein Punkt nur dann in Ruhe verharren, wenn $g_{44} =$ konst. ist. Denn für einen solchen Punkt ist $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$.

Die Gleichung (355) fordert $\begin{Bmatrix} 44 \\ i \end{Bmatrix} = 0$ oder:

(414) $$\begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3); \qquad g_{44} = \text{konst.}$$

g_{44} ist also räumlich und zeitlich konstant.

Wir setzen:

(415) $$g_{44} = 1.$$

Es bleiben nun noch die Koeffizienten g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ herzuleiten, welche die Metrik des Raumes festlegen. Wir nehmen einen besonderen Fall des geschlossenen Raumes, den sphärischen

Raum an. Wir gehen von einem vierdimensionalen Euklidischen Raum mit den Cartesischen Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ aus[1]). Das vierdimensionale räumliche Linienelement ist:

$$d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \tag{416}$$

In diesem Raum ist die dreidimensionale Hyperfläche definiert durch:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = a^2. \tag{417}$$

a ist der konstante Krümmungsradius des sphärischen Raumes. ξ_1, ξ_2, ξ_3 fassen wir nun als Parameter des dreidimensionalen Raumes im Sinn unserer Gleichungen (274) auf. Denken wir uns also alle vierdimensionalen Punkte auf die Hyperebene $\xi_4 = 0$ projiziert, so sind die ξ_1, ξ_2, ξ_3 zugleich Cartesische Koordinaten des dreidimensionalen Bildraumes. Das Linienelement $d\sigma$ in diesem erhalten wir dadurch, daß wir aus (416) und (417) ξ_4 eliminieren. ξ_4 ist durch (417) als Funktion der dreidimensionalen Koordinaten festgelegt. Die Ausrechnung ergibt:

$$\begin{gathered} d\sigma^2 = \gamma_{ik}\, d\xi_i\, d\xi_k \qquad i, k = 1, 2, 3 \\ \gamma_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\xi_i \xi_k}{a^2 - \varrho^2}, \end{gathered} \tag{418}$$

wo $\delta_{ik} = 1$ $(i = k)$ bzw. $= 0$ $(i \neq k)$ und $\varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ ist. Für die Potentiale g_{ik} selbst erhält man also:

$$g_{ik} = -\left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right); \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{419}$$

Hierbei haben wir an Stelle der Parameter ξ_i, ξ_k die Parameter x_i, x_k des dreidimensionalen räumlichen Kontinuums gesetzt.

Die Gravitationsgleichungen (405) werden nun, wie sich sofort ergibt, durch die T_{ik} (412) und die g_{ik} (413), (415) und (419) erfüllt; diese g_{ik} stellen also eine Lösung unserer Gravitationsgleichungen II. Art dar. Beachten wir die Definitionsgleichung (360) für R_{ik}, so ergibt sich zuerst:

$$R_{i4} = R_{4i} = R_{44} = 0. \tag{420}$$

Die Gleichung (405) geht für $i = k = 4$, wenn wir berücksichtigen, daß $T = \mu_0$ ist, über in:

[1]) Man beachte im folgenden die Analogie mit den Ausführungen S. 125 ff. und 132 ff.

(421)
$$-\lambda = -\frac{\varkappa\mu_0}{2}$$

oder:

(422)
$$\lambda = \frac{R_0}{4} = \frac{\varkappa\mu_0}{2}.$$

Die Konstante λ oder die skalare Krümmung R_0 ist durch die Dichte der Materie bestimmt. Für die zu $R_{i4} = R_{4i}$ $(i = 1, 2, 3)$ gehörenden Gleichungen (405) werden beide Seiten identisch null.

Es bleiben noch die Gravitationsgleichungen für $i, k = 1, 2, 3$ zu behandeln. Für diese schlagen wir einen besonderen Weg ein. In den R_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ kommt wegen (413), (415) und der zeitlichen Konstanz der g_{ik} der Index 4 gar nicht vor. Unsere R_{ik} sind nur von den räumlichen g_{ik} (419) abhängig; sie sind also Funktionen des Ortes. Da in unserem sphärischen Raum alle Punkte gleichwertig sind, jeder Punkt also die Koordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ haben kann, so genügt es, die Rechnung für einen solchen Punkt durchzuführen.

Die g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ nehmen für unseren räumlichen Nullpunkt die Werte:

(423)
$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

an. Die ersten Differentialquotienten aller g_{ik} werden wegen (419) null. Der Tensor R_{ik} nimmt also den speziellen Wert an:

(424)
$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} ik \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} ik \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} ik \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}.$$

Hierin ist $i, k = 1, 2, 3$ zu setzen. Die Ausrechnung ergibt:

(425)
$$R_{ik} = -\frac{2}{a^2} \text{ für } i = k$$
$$R_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k,$$

so daß die Gravitationsgleichungen (405) auf die Beziehung:

(426)
$$-\frac{2}{a^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\mu_0}{2}$$

führen. Die Gravitationsgleichungen werden also durch eine räumlich geschlossene, endliche Welt befriedigt, wenn:

$$\lambda = \frac{R_0}{4} = \frac{\varkappa \mu_0}{2} = \frac{1}{a^2} \tag{427}$$

ist. Der Radius a des sphärischen Raumes steht in einfacher Beziehung zu unserer Konstanten λ bzw. dem Krümmungsskalar R_0. Das Volumen unseres Raumes ist $2\pi^2 a^3$. Die Gesamtmasse der Welt ist demnach:

$$M = \mu_0 \cdot 2\pi^2 a^3 = 4\pi^2 \frac{a}{\varkappa}. \tag{428}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß sobald die Gesamtmasse M verschwindet, auch der Radius a des sphärischen Raumes null wird. Die Geometrie des Raumes ist also völlig an die Materie gebunden; sobald keine Materie vorhanden ist, hat es keinen Sinn von einem Raum und einer Bewegung oder einer Geometrie in diesem zu sprechen. Die durch die Geometrie beschriebenen Eigenschaften des Raumes sind allein durch die vorhandene Materie bedingt. Der Raum im ganzen ist eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung, die wir als sphärisch annehmen können[1]). In der Nähe von Massen weicht die Geometrie hiervon in einer durch die Masse bedingten Weise ab. Wir können die Geometrie, die durch die Gravitationsgleichungen II. und III. Art festgelegt ist, als quasisphärisch bezeichnen. Beschränken wir uns auf kleine Gebiete — das lokale Koordinatensystem —, so bleibt die Euklidische Geometrie als Näherung mit vollem Recht bestehen.

Durch die Erweiterung der ursprünglichen Gravitationsgleichungen (I. Art) ist der Relativitätsgedanke zu Ende gedacht. Zugleich hat durch die Einsteinsche Gravitationstheorie die Geometrie ihre letzte Vollendung erfahren. Wenn Riemann am Schluß seiner früher (vgl. S. 123) erwähnten Antrittsvorlesung darauf hingewiesen hat, daß der Grund der Maßverhältnisse des Raumes wohl außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden muß, so hat Einstein diese Kräfte als die Gravitationskräfte der Materie erkannt.

[1]) Es wäre auch ein elliptischer Raum möglich. Vgl. F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Nachr. d. Gesellsch. d. W. zu Göttingen. Math. Phys. Kl. 1918. S. 405.

Die Annahme gleichförmig verteilter, ruhender Materie trifft nun freilich im Weltall nicht völlig zu. Wohl wissen wir, daß die Sterne relativ zueinander nur eine sehr geringe Geschwindigkeit, verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, besitzen, so daß wir die Materie im Durchschnitt als ruhend annehmen können. Aber die Verteilung ist nicht gleichmäßig. Unser Fixsternsystem — die Gesamtheit der beobachtbaren Sterne — zeigt eine deutlich ausgesprochene Häufung in der Milchstraße. Die Annahme gleichmäßiger Verteilung ist also nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit aufzufassen.

Schließlich müssen wir noch versuchen, die Größe des Krümmungsradius a unseres endlichen, geschlossenen Raumes zu bestimmen. W. de Sitter[1]) hat auf Grund verschiedener Annahmen den Radius a berechnet und dafür Werte von 10^{12} bis 10^{13} Erdbahnradien gefunden. Dem würde eine mittlere Dichte von etwa 10^{-26} g für den Kubikzentimeter entsprechen. Die Konstante λ besitzt hiernach etwa den Wert $\lambda = 10^{-30}$. λ ist also sehr klein. Wir können es deshalb immer vernachlässigen, wenn wir uns auf Bewegungsvorgänge in kleinen Teilen des Weltalls beschränken. Für alle Untersuchungen innerhalb des Sonnensystems sind also die Einsteinschen Gravitationsgleichungen I. Art völlig hinreichend. Auf sie werden wir uns auch bei den folgenden Betrachtungen zuerst beschränken.

§ 14. Besondere Fälle der Gravitationstheorie. Das Gravitationsfeld der Sterne.

Bei der Behandlung einzelner Fälle der Gravitationstheorie beschränken wir uns aus den am Ende des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Gründen zunächst auf die Gravitationsgleichungen I. Art.

Wir zeigen zuerst, daß diese unter gewissen Voraussetzungen auf die Newtonsche Theorie als erste Näherung führen. Wir betrachten lediglich Koordinatensysteme, für welche $\sqrt{g} = 1$ ist. Wir nehmen an, daß die g_{ik} von den Werten (281)

[1]) W. de Sitter, On Einsteins theory of gravitation, and its astronomical consequences. III. paper. Monthly Not. of. R. A. S. Vol. 78. Nr. 1. Diese Rechnungen beziehen sich auf den elliptischen Raum. Vgl. Anm. S. 170.

der speziellen Relativitätstheorie nur um kleine Größen erster Ordnung abweichen, und daß wir Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen können. Die Gravitationsfelder sollen ferner durch Massen erzeugt sein, die sich ganz im Endlichen befinden.

Im räumlich Unendlichen sollen die g_{ik} völlig in die Werte (281) übergehen. Ferner beschränken wir uns auf Geschwindigkeiten, die gegen die Lichtgeschwindigkeit klein sind. Wir betrachten deshalb auch $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$ als kleine Größen I. Ordnung und setzen $\frac{dx_4}{ds}$ bis auf Größen II. Ordnung gleich 1.

Die **Bewegungsgleichungen** (355) **eines materiellen Punktes im Gravitationsfeld** gehen danach über in:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{44} = 0; \tag{429}$$

oder, wenn $ds = dx_4 = dt$ gesetzt, also die Zeiteinheit so gewählt wird, daß $c = 1$ ist, in:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \Gamma^i_{44} = 0. \tag{430}$$

Nun ist: $\Gamma^i_{44} = g^{ik}\begin{bmatrix} 44 \\ k \end{bmatrix}$. Für unsere Näherung sind die g^{ik} für $i \neq k$ Größen erster Ordnung; für $i = k$ dagegen nahe ∓ 1 (vgl. S. 142). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{44} &= -\begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \Gamma^4_{44} &= +\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{431}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \begin{bmatrix} 44 \\ i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} &= -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{432}$$

Die letzte dieser Gleichungen führt auf die Identität $0 = 0$.

Betrachten wir nun noch die Materie, auf welche wir die Bewegung des Massenpunktes beziehen, als ruhend, behandeln wir

also ein statisches Gravitationsfeld, in welchem die g_{ik} von der Zeit unabhängig sind, so gehen die Bewegungsgleichungen (432) schließlich über in:

$$\text{(433)} \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen sind mit den **Newtonschen Bewegungsgleichungen** identisch; $\frac{g_{44}}{2}$ ist das Gravitationspotential der Newtonschen Theorie (vgl. hierzu S. 155). Die Bewegung eines materiellen Punktes ist also in erster Näherung allein durch die Komponente g_{44} unseres Potentialtensors bestimmt.

Ebenso ergibt sich, daß die Einsteinschen Gravitationsgleichungen I. Art (384) bei derselben Näherung auf die Poissonsche Gleichung (359) führen. Der Energietensor der Materie ist nämlich bestimmt durch:

$$\text{(229)} \qquad T^{rs} = \mu_0 \frac{dx_r}{ds}\frac{dx_s}{ds}$$

oder:

$$\text{(434)} \qquad T_{rs} = \mu_0 g_{rt} \frac{dx_t}{ds} g_{sn} \frac{dx_n}{ds}.$$

Für unsere Näherung sind alle Komponenten bis auf T_{44} null. Es bleibt:

$$\text{(435)} \qquad T_{44} = \mu_0 \left(g_{44}\frac{dx_4}{ds}\right)^2 \doteq \mu_0.$$

Ferner ist:

$$\text{(436)} \qquad T = g^{ik} T_{ik} = g^{44} T_{44} = \mu_0.$$

Die rechte Seite der Gravitationsgleichung geht demnach für $i = k = 4$ in $-\varkappa(T_{44} - \frac{1}{2} g_{44} T) = -\frac{1}{2}\varkappa\mu_0$ über. Da es sich in der Newtonschen Theorie lediglich um die Bestimmung von g_{44} handelt, so können wir uns, wie wir sofort erkennen werden, mit dieser einen Gleichung begnügen.

Wir betrachten nun die linke Seite von (384) und gehen hierzu auf (362) zurück. Das zweite Glied ist klein von zweiter Ordnung. Das erste liefert:

$$\text{(437)} \qquad -\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{ {ik \atop r} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{rl}\left[{ik \atop l} \right]\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[{ik \atop 1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[{ik \atop 2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[{ik \atop 3} \right] - \frac{\partial}{\partial x_4}\left[{ik \atop 4} \right].$$

Für $i = k = 4$ geht dieser Ausdruck wegen (320) in:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44} \tag{438}$$

über. Die letzte der Gleichungen (384) lautet also:

$$\Delta g_{44} = \varkappa \mu_0 . \tag{439}$$

Sie stimmt mit der Poissonschen Gleichung (359) überein.

Die Newtonsche Theorie ist also als Näherung in der Einsteinschen Gravitationstheorie enthalten.

Das Gravitationspotential[1]) ist nach (439) und (433):

$$\frac{1}{2} g_{44} = -\frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\mu_0 \, dV}{r} + \text{konst.} \tag{440}$$

Leiten wir das Gravitationspotential aus der üblichen Form der Poissonschen Gleichung (359) her, so müssen wir an Stelle von (433) die Gleichung:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{441}$$

setzen. Der Faktor $\frac{1}{c^2}$ rührt davon her, daß wir des Vergleiches wegen hier dieselbe Zeiteinheit einführen müssen wie bei (433) und dort ist $dt = dx_4$ ($= c\,dt$ nach der alten Bezeichnung) gesetzt. Bei der gewählten Zeiteinheit erhalten wir für das Gravitationspotential:

$$\Phi = -\frac{k}{c^2}\int \frac{\mu_0 \, dV}{r} + \text{konst.}, \tag{442}$$

wobei k den Wert 6.7×10^{-8} hat. Zwischen der gewöhnlichen Gravitationskonstanten k und der Konstanten $\varkappa$ der Einsteinschen Gravitationstheorie besteht die Beziehung:

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1.87 \times 10^{-27} . \tag{443}$$

Wir führen nun an zweiter Stelle die genäherte Integration unserer Gravitationsgleichungen I. Art vollständig durch[2]).

[1]) Vgl. z. B. M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. S. 55.

[2]) Einstein, Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1915. S. 833.

Wir nehmen hierbei folgenden einfachen Fall an. Eine Masse M (z. B. die Sonne) sei gegeben; wir wollen die sämtlichen Komponenten g_{ik} des Gravitationsfeldes außerhalb der Masse näherungsweise bestimmen. Hierbei sei wieder $\sqrt{g} = 1$. Die g_{ik} müssen die Gleichung erfüllen;

$$(366) \qquad \frac{\partial}{\partial x_r} \Gamma^r_{ik} = \Gamma^r_{is} \Gamma^s_{kr}.$$

Um die g_{ik} eindeutig festlegen zu können, müssen wir ein Koordinaten-(bzw. Parameter-)system definieren, auf das sie sich beziehen sollen. Beim Übergang zu einem beliebigen anderen System transformieren sich die g_{ik} nach den Gesetzen der Tensoranalysis, während Gravitationsgleichungen und Bewegungsgleichungen natürlich ihrer Form nach bestehen bleiben.

Wir wählen nun das Parametersystem entsprechend der Parameterdarstellung (274) für die Fläche. Die Parameter in dem als beliebige dreidimensionale Mannigfaltigkeit anzunehmenden Raum sollen zugleich rechtwinklige Koordinaten x_1, x_2, x_3 im Euklidischen „Bildraum" sein; $x_4 = ct$ stehe in jedem Weltpunkt auf dem Raum senkrecht und habe in der Abbildung der Welt Euklidische Struktur. Die Parameter x_1, x_2, x_3, x_4 entsprechen also im Bild den Koordinaten der speziellen Relativitätstheorie. Das vierdimensionale Linienelement hat aber nicht die spezielle Form (276), sondern die allgemeine (279). Die zu bestimmenden Koeffizienten g_{ik} legen die Geometrie in der Umgebung jedes Punktes fest (vgl. S. 138). Die g_{ik} müssen noch folgende Forderungen erfüllen[1]).

1) Alle Komponenten g_{ik} sind von der Zeit unabhängig.
2) Die Koeffizienten $g_{4i} = g_{i4}$ $(i = 1, 2, 3)$ sind streng gleich null (vgl. S. 138).
3) Die Lösung ist räumlich symmetrisch um den in den Mittelpunkt der Masse M zu legenden Anfangspunkt unseres Koordinatensystems. Die Lösung gilt also nicht nur für ein Koordinatensystem, sondern für jedes dazu um den Anfangspunkt gedrehte.
4) In unendlich großer Entfernung von M gehen die g_{ik} in die Werte (281) der speziellen Relativitätstheorie über.

[1]) Vgl. auch K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1916. S. 190.

Die diese Bedingungen erfüllende Lösung unserer Gravitationsgleichungen lautet nun:

$$g_{ik} = -\delta_{ik} - \alpha \frac{x_i x_k}{r^3} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

(444) $$g_{i4} = g_{4i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}.$$

Hierbei ist $\delta_{ik} = 1$ bzw. $= 0$ für $i = k$ bzw. $i \neq k$. r bedeutet die Größe $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Die Konstante α ist, um mit (440) in Übereinstimmung zu kommen, zu setzen:

(445) $$\alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi} = \frac{2kM}{c^2}.$$

M ist die Masse, deren Gravitationspotentiale g_{ik} wir bestimmen.

Wir müssen nun zeigen, daß das Wertesystem (444) die Gravitationsgleichungen (366), sowie die Bedingung $\sqrt{g} = 1$ näherungsweise erfüllt.

Wir betrachten hierbei wieder wie vorher die Unterschiede der g_{ik} gegen 1 bzw. 0 als kleine Größen I. Ordnung und vernachlässigen dagegen diejenigen II. und höherer Ordnung.

Daß die Determinantenbedingung $\sqrt{g} = 1$ erfüllt ist, erkennen wir sofort durch Einsetzen.

Wir erhalten, wenn wir uns auf Glieder I. Ordnung beschränken:

(446) $$g = -\begin{vmatrix} \left(-1 - \alpha\frac{x_1^2}{r^3}\right) & -\alpha\frac{x_1 x_2}{r^3} & -\alpha\frac{x_1 x_3}{r^3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\alpha}{r} \end{vmatrix}$$

$$\equiv -\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left\{-\left(1 + \alpha\frac{x_1^2}{r^3}\right)\left(1 + \alpha\frac{x_2^2}{r^3}\right)\left(1 + \alpha\frac{x_3^2}{r^3}\right)\right\}$$

$$\equiv \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \equiv 1.$$

Die Gravitationsgleichung (366) geht näherungsweise über in:

(447) $$\frac{\partial}{\partial x_r}\Gamma_{ik}^r = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = 0,$$

wobei die Summation über $r = 1, 2, 3$ zu erstrecken ist. $\begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix}$ ist

von x_4 unabhängig. Setzen wir die Werte (444) in (447) ein, so werden die letzteren Gleichungen befriedigt. Wir überzeugen uns in einem Einzelfall. Es ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{x_1^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{x_2^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2}\left(\frac{x_1 x_3}{r^3}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}\left(\frac{x_2 x_3}{r^3}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{x_1 x_2}{r^3}\right)\right\}.$$

Die Ausrechnung der Differentialquotienten zeigt, daß sämtliche Glieder der geschweiften Klammer sich gegenseitig wegheben.

Die unter (444) gefundenen g_{ik} lassen uns nun die durch die Masse M festgelegten metrischen Eigenschaften von Raum und Zeit als Funktion der Entfernung r von M erkennen. Wir haben hier einen speziellen Fall, der S. 138 ff. durchgeführten allgemeineren Betrachtungen vor uns.

Legen wir einen unendlich kleinen Einheitsmaßstab, für welchen $ds^2 = -1$ ist, in die x_1-Achse, so ist nach (301), wenn wir $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$ beachten:

$$(448)\qquad dx_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\frac{x_1^2}{r^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{r}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}.$$

Während der Stab im lokalen System die Länge 1 besitzt, ist er im allgemeinen System verkürzt, wenn er radial angelegt wird. Da wir stets Parameterdifferenzen „messen", so erscheint also ein Stab, der in unserer unmittelbaren Nähe (im lokalen System) eine gewisse Länge dl besitzt, stets verkürzt, wenn wir ihn an irgendeine Stelle unseres Gravitationsfeldes in eine radiale Lage bringen. Er erscheint um so kürzer, je näher er der Masse M zu liegen kommt.

Bringen wir nun den Einheitsmaßstab in tangentiale Lage. Dann ist wieder $x_1 = r$, $x_2 = x_3 = 0$. Also:

$$(449)\qquad dx_2 = \frac{1}{\sqrt{-g_{22}}} = 1.$$

Der tangential angelegte Stab erscheint stets unverkürzt.

Betrachten wir noch eine Einheitsuhr. Nach (302) ist:

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

oder:

$$(450) \quad dx_4 = 1 + \frac{\alpha}{2r} = 1 + \frac{\varkappa M}{8\pi r} = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\mu_0 dV}{r} = 1 - \frac{\Phi}{c^2}.$$

Jede Uhr läuft also, verglichen mit einer Uhr in unserer unmittelbaren Nähe (im lokalen System), überall im Gravitationsfeld langsamer, um so langsamer, je näher sie sich der Masse befindet. Das Licht, das von einem schwingenden Atom zu uns gelangt, muß eine Verschiebung nach Rot zeigen. Wir kommen damit zu demselben Ergebnis, das wir schon in § 10 unmittelbar aus dem Äquivalenzprinzip gewonnen hatten. Beim Vergleich ist nur zu beachten, daß Φ in (262) eine Potentialdifferenz, dagegen in (450) das Potential selbst bedeutet.

Wir untersuchen nun noch den Gang eines Lichtstrahles im Gravitationsfeld unserer Masse M. Die Bewegung eines Lichtstrahles ist im allgemeinen System durch:

$$(451) \qquad ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k = 0$$

festgelegt (vgl. S. 140). Ferner ist die beobachtete Lichtgeschwindigkeit, wenn wir die Bewegung in dem S. 175 definierten Euklidischen Bildraum betrachten, durch:

$$(452) \qquad \gamma = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

definiert. Hierbei ergeben sich die Größen $\frac{dx_1}{dx_4}, \frac{dx_2}{dx_4}, \frac{dx_3}{dx_4}$ im Bildraum aus (451), wenn die Richtung an irgendeiner Stelle (d. h. $dx_1 : dx_2 : dx_3$) bekannt ist. Da die Koeffizienten g_{ik} nicht konstant sind, so ist auch die Lichtgeschwindigkeit γ im Gravitationsfeld variabel, wie wir bereits früher (vgl. S. 140) gefunden hatten. Ein Lichtstrahl ist also im allgemeinen, wenn er in der Nähe der Masse M vorübergeht, gekrümmt. Den Betrag der Krümmung wollen wir berechnen.

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der in der $x_1 x_2$-Bildebene verläuft.

Der Krümmungswinkel auf dem unendlich kleinen Weg γdt ist nach nachstehender Fig. 3:

(453)
$$\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1}\, dt = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dt,$$

wobei der Winkel positiv rechnet, wenn die Krümmung nach dem Koordinatenanfangspunkt hin konkav ist. Die Gesamtkrümmung

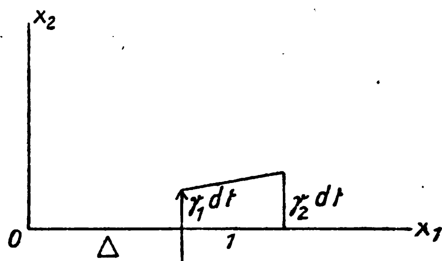


Fig. 3.

eines senkrecht zur x_1-Achse in der Richtung der positiven x_2-Achse und in der Entfernung Δ an M vorbeigehenden Lichtstrahles können wir genähert[1]):

(454)
$$B = + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2$$

setzen. B stellt die Krümmung des Lichtstrahles dar, wenn wir seinen Weg in der Bildebene $x_1 x_2$ in Cartesischen Koordinaten auftragen. Bei der Wahl unseres Koordinatensystems ist $dx_3 = 0$. Die Änderung dx_1 auf dem Lichtweg dx_2 sehen wir als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung an; es ist also auch $dx_1 = 0$, und (451) geht über in:

(455)
$$g_{22}\, dx_2^2 + g_{44}\, dx_4^2 = 0.$$

Die Geschwindigkeit γ ist nach (452) und (444):

(456)
$$\gamma = \left(\frac{-g_{44}}{+g_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 - \alpha\frac{x_2^2}{r^3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Diese letzte Gleichung zeigt, daß die Lichtgeschwindigkeit hier den Wert 1 nicht übersteigen kann.

[1]) Die strenge Rechnung wäre in anderer Weise durchzuführen. Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. § 29.

Der genäherte Wert der Krümmung wird nun:

$$B = \frac{\alpha}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1}{r^3}\,dx_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1 x_2^2}{r^5}\,dx_2\right).$$

Führt man Polarkoordinaten ein, setzt also:

$$x_1 = \varDelta; \qquad x_2 = \varDelta \operatorname{tg}\vartheta; \qquad r = \frac{\varDelta}{\cos\vartheta},$$

so ergibt die Ausrechnung der Integrale für die Gesamtkrümmung den Wert:

$$B = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\varDelta} + \frac{2}{\varDelta}\right) = \frac{2\alpha}{\varDelta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\varDelta} = \frac{4kM}{c^2\cdot\varDelta}. \tag{457}$$

Für einen am Sonnenrand vorbeigehenden Lichtstrahl wäre folgender Betrag der Krümmung zu erwarten. Da:

$k = 6.7 \times 10^{-8}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{gr sec}^2}$, $c = 3 \times 10^{10}$ cm/sec, $M_\odot = 2 \times 10^{33}$ gr, $\varDelta = 7 \times 10^{10}$ cm ist, so wird:

$$B = 8 \times 10^{-6} = 1''\!.7. \tag{458}$$

Die Abnahme der Strahlenkrümmung mit zunehmender Entfernung von der Sonne erfolgt nach der Formel (457).

Die hier gefundene Gesetzmäßigkeit ist der Nachprüfung durch die Beobachtung unmittelbar zugänglich. Bei totalen Sonnenfinsternissen ist es möglich, die Örter von Fixsternen in unmittelbarer Nähe der Sonne photographisch festzuhalten, und durch Vergleich mit den Örtern derselben Sterne aus Aufnahmen am Nachthimmel läßt sich der Betrag der Krümmung ausmessen. Da wir auch die beobachteten Beträge der Krümmung in einem Euklidischen Bildraum darstellen, so kann ein direkter Vergleich mit der Theorie durchgeführt werden.

Bei der totalen Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 ist es zum erstenmal zwei englischen Expeditionen gelungen, brauchbare Aufnahmen von Fixsternen zu erhalten, und die beobachteten Verschiebungen zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den von der Einsteinschen Gravitationstheorie geforderten Beträgen[1]). Doch

[1]) Sir F. W. Dyson, A. S. Eddington und C. Davidson. A determination of the deflection of light by the suns gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919. Philosoph. Transact.

bedarf dieses Ergebnis noch der Sicherstellung durch weitere Beobachtungen bei zukünftigen Finsternissen.

Wir kehren jetzt zur Bewegung eines Punktes (Planeten) im Gravitationsfeld der Masse M (Sonne) zurück. Die Bewegung wird durch die Gleichung der geodätischen Linie:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {rs \atop i} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_s}{ds} = 0 \tag{355}$$

beschrieben.

Die Näherungswerte (444) führen freilich, wie wir bereits zeigten, zur Newtonschen Theorie. Wollen wir feststellen, ob die Einsteinsche Gravitationstheorie Unterschiede gegen diese bedingt, so müssen wir eine strengere Lösung suchen, die mindestens die kleinen Größen zweiter Ordnung beibehält. Diese ist zuerst von Einstein gegeben worden (vgl. Anm. 2. S. 174). Die völlig strenge Lösung der Gravitationsgleichungen I. Art hat Schwarzschild (vgl. Anm. S. 175) gefunden[1]).

Wir wollen uns hier darauf beschränken die Ergebnisse der strengen Lösung anzuführen. Wählen wir das Linienelement in der Form:

$$ds^2 = f^2 dx_4^2 - d\sigma^2, \tag{459}$$

(vgl. S. 138), so treten an Stelle der Größen (444) die folgenden strengen Werte:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= -\delta_{ik} - \frac{\alpha x_i x_k}{f^2 r^3} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \\ g_{i4} &= g_{4i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ g_{44} &= f^2 = 1 - \frac{\alpha}{r}\,. \end{aligned} \tag{460}$$

Die Wahl des Koordinaten- (Parameter-)Systems ist dieselbe wie für die genäherte Lösung. Auch erfüllen die g_{ik} dieselben Bedingungen wie dort. Insbesondere ist wieder $\sqrt{g} = 1$.

of the R. Soc. of London. Ser. A. Vol. 220. S. 291. Vgl. auch E. Freundlich, Der Bericht der englischen Sonnenfinsternisexpedition über die Ablenkung des Lichtes im Gravitationsfelde der Sonne. „Die Naturwissenschaften" 8. Jahrg. 1920. Heft 34. S. 667.

[1]) Vgl. auch H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. § 30. Strenge Lösung des Einkörperproblems.

Die Gleichung (355) der geodätischen Linie ergibt für den Index $i = 4$ das Prinzip der lebendigen Kraft in der Form:

$$-\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r(r-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -c \tag{461}$$

und für die Indizes $i = 1, 2, 3$ die Flächensätze:

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c'. \tag{462}$$

Der Unterschied gegen die Newtonsche Theorie[1]) besteht darin, daß die Differentiation hier nach der Eigenzeit s statt nach der Zeit t erfolgt; außerdem hat das dritte Glied von (461) den Faktor $(r - \alpha)$ statt r. Die beiden Gleichungen (461) und (462) gestatten φ als Funktion von r herzuleiten, beschreiben also die Bewegung des Punktes vollständig. r und φ sind Parameter im allgemeinen System, die wir in einem Euklidischen Bildraum (vgl. S. 175) auftragen wollen. Die Bewegung, die wir erhalten werden, bezieht sich also auf ein System von Polarkoordinaten im gewöhnlichen Sinn.

Da wir die Bewegung der Planeten in bezug auf die Sonne in der Astronomie ebenfalls in einem solchen Systeme festlegen, so ist ein unmittelbarer Vergleich der Theorie mit der Wirklichkeit möglich.

Wir verfahren bei der Elimination der Eigenzeit aus (461) und (462) ebenso wie in der Newtonschen Theorie.

Setzen wir:

$$r = \frac{1}{\varrho}, \tag{463}$$

so geht (461) über in:

$$\left(\frac{d\varrho}{\varrho^2 ds}\right)^2 = \alpha\varrho - c - c'^2\varrho^2(1 - \alpha\varrho).$$

Dividieren wir durch den aus (462) sich ergebenden Ausdruck:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = c'^2\varrho^4,$$

so erhalten wir für die gesuchte Gleichung zwischen r und φ:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\alpha}{c'^2}\varrho - \frac{c}{c'^2} - \varrho^2 + \alpha\varrho^3. \tag{464}$$

[1]) Vgl., auch für das Folgende, M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. S. 64ff.

In der Newtonschen Theorie fehlt das letzte Glied der rechten Seite. Das Polynom zweiten Grades $\varrho^2 - \frac{\alpha}{c'^2}\varrho + \frac{c}{c'^2}$ hat dort für die Planetenbewegung zwei positive Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2, die der Entfernung des Perihels bzw. Aphels der Bahn entsprechen. Es ist also $\varrho_1 > \varrho > \varrho_2$. Da die rechte Seite von (464) diese beiden Lösungen ebenfalls ergeben muß, so besitzt sie zufolge eines Satzes der Algebra drei positive Wurzeln. Die eine davon, ϱ_0, ist, wie wir sehen werden, erheblich größer als ϱ_1 bzw. ϱ_2.

Wir können also für (464) schreiben:

$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \alpha(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2). \tag{465}$$

Führen wir statt der Konstanten ϱ_1 und ϱ_2 die in der Astronomie gebräuchlichen Größen a (halbe große Bahnachse) und e (Exzentrizität) ein, indem wir setzen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = a(1-e), \quad \frac{1}{\varrho_2} = a(1+e), \tag{466}$$

so wird:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2}{a(1-e^2)} = \frac{2}{p}, \quad \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2e}{a(1-e^2)} = \frac{2e}{p}. \tag{467}$$

$p = a(1 - e^2)$ ist hierbei der Parameter der Bahn. Vergleichen wir die Koeffizienten von ϱ^2 in (464) und (465), so folgt:

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{\alpha}. \tag{468}$$

Unter Beachtung von (445) und (443) ergibt sich hieraus, daß ϱ_0 sehr groß im Vergleich zu ϱ_1 und ϱ_2 ist. Die gesuchte Beziehung zwischen r und φ nimmt nun zufolge (465) die Form an:

$$\varphi = \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\alpha(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)}}. \tag{469}$$

In der Newtonschen Theorie lautet die analoge Beziehung:

$$d\theta = \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2)}}, \tag{470}$$

und diese führt auf die Integralgleichung:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \tag{471}$$

d. h. auf die Gleichung eines Kegelschnittes, wobei θ die wahre

Anomalie bedeutet. (471) läßt sich unter Benutzung von (467) auch schreiben:

(472) $$\varrho - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cos\theta.$$

Wir führen nun den Wert $d\theta$ aus (470) in (469) ein und erhalten:

(473) $$\varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha(\varrho_0 - \varrho)}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\theta\right)}}.$$

φ ist also danach eine Funktion der wahren Anomalie des Kegelschnittes. Der Massenpunkt bewegt sich auch nach der Einsteinschen Gravitationstheorie in einem Kegelschnitt. Beziehen wir die Richtung des Radiusvektors auf die Perihelrichtung, so ist diese durch den Winkel θ gegeben. Beziehen wir sie jedoch auf eine feste Richtung unseres Bildraumes, so ist sie durch φ definiert. Der Kegelschnitt selbst führt also eine Drehung aus. Beschränken wir uns auf die Ellipse, so ist das Perihel durch die Werte $\theta = 0$, 2π, ... festgelegt. Einem vollen Umlauf des Punktes in der Ellipse entspricht der Winkel:

(474) $$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\theta\right)}}.$$

Da ϱ_1 und ϱ_2, soweit die Planeten in Frage kommen, nur wenig voneinander verschieden sind, so können wir für diese näherungsweise setzen:

(475) $$\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)}}.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{a(1-e^2)}\right)}} = 1 + \tfrac{3}{2}\frac{\alpha}{a(1-e^2)}.$$

Das Perihel der Ellipse rückt also während eines Umlaufes um $\frac{3\alpha\pi}{a(1-e^2)}$ vor. Beachtet man noch, daß nach dem dritten Keplerschen Gesetz:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{kM}$$

ist, also:

$$\alpha = \frac{2kM}{c^2} = \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2},$$

so rückt das Perihel einer Planetenbahn nach der Einsteinschen Gravitationstheorie bei jedem Umlauf um den Betrag:

(476) $$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

weiter.

Nun zeigen die Bewegungen unserer Planeten in der Tat, wenn man sie von den Einflüssen der gegenseitigen Störungen befreit, ein solches Fortrücken ihrer Bahnellipse, die allerdings infolge der geringen Exzentrizitäten nur bei Merkur sicher zu bestimmen ist. Hier wurde sie auch zuerst von Leverrier aufgefunden. Sie erreicht für Merkur in 100 Jahren den immerhin erheblichen Betrag von 41″ (± 2″). Die Einsteinsche Theorie ergibt hierfür 43″. Für Venus ist der beobachtete Wert ganz unsicher. Für Erde und Mars sind die Werte:

	Beobachtung:	Theorie:
Erde	6″ (± 8″)	4″
Mars	8″ (± 4″)	1″.

Die ausgezeichnete Übereinstimmung des aus der Theorie sich ergebenden Fortschreitens des Merkurperihels mit dem aus den Beobachtungen folgenden Betrag ist ein ganz wesentliches Argument zugunsten der Einsteinschen Gravitationstheorie. Doch ist es bei dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse kein ausschlaggebendes. H. v. Seeliger hat gezeigt[1]), daß auch durch Massen in der Nähe der Sonne die beobachteten Perihelbewegungen (sowie andere Anomalien der Planetenbahnen) zustande kommen können. Es gibt augenblicklich allerdings kein Mittel das Vor-

[1]) H. Seeliger, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der Akad. d. Wiss. München, Bd. 36. 1906. S. 595. Ferner: E. Freundlich, Über die Erklärung der Anomalien im Planetensystem durch die Gravitationswirkung interplanetarer Massen. Astron. Nachrichten, Bd. 201. S. 49. H. Seeliger, Über die Anomalien in der Bewegung der inneren Planeten. Astron. Nachrichten, Bd. 201. S. 273.

handensein oder Nichtvorhandensein solcher Massen unabhängig von diesen Anomalien nachzuweisen. Die Newtonsche Theorie muß also bei der Erklärung der Perihelbewegung zu hypothetischen Massen greifen, auf welche die Einsteinsche Gravitationstheorie ganz verzichten kann.

Noch ein weiteres Problem, das für die Relativitätstheorie von grundlegender Bedeutung ist, soll kurz behandelt werden: das Rotationsproblem. Wir haben die Rotation wiederholt als Beispiel herangezogen, um den Unterschied zwischen relativer und absoluter Bewegung, zwischen der Auffassung der klassischen Mechanik und derjenigen der Relativitätstheorie besonders hervorzuheben. Wir müssen nun von der Relativitätstheorie verlangen, daß sie die bei der Rotation auftretenden Zentrifugal- und Corioliskräfte auch wirklich auf das Vorhandensein von Massen zurückführt, die sich außerhalb des rotierenden Systems befinden.

Eine erste Lösung dieses Problems ist auf Grund der Gravitationsgleichungen I. Art von H. Thirring[1]) gegeben worden. Im Innern einer mit Masse gleichmäßig belegten, rotierenden Hohlkugel tritt ein Gravitationsfeld auf; und dieses übt auf einen dort sich befindenden Massenpunkt Kräfte aus, die den Zentrifugal- und Corioliskräften der klassischen Mechanik analog sind und von der Masse der Hohlkugel und deren Rotationsgeschwindigkeit abhängen. Bei der Integration der Gravitationsgleichungen war hier ebenso wie bei der Lösung des Einkörperproblems (vgl. S. 175) anzunehmen notwendig, daß die Größen g_{ik} im Unendlichfernen in die Werte der speziellen Relativitätstheorie übergehen. Infolgedessen bezieht sich das Ergebnis nur auf ein beschränktes Gebiet im Endlichen.

Sobald aber, unabhängig von der Rotation der Hohlkugel, das Bezugssystem selbst gegen ein Koordinatensystem rotiert, in welchem die Grenzbedingungen im Unendlichfernen erfüllt sind, treten die gewöhnlichen Zentrifugal- und Corioliskräfte der klassischen Mechanik wieder auf und zwar auch dann, wenn alle Massen des Universums verschwinden. Wie wir bereits früher (vgl. S. 166) sahen, besitzt eine Masse in einem Koordinatensystem der angegebenen Art Trägheit, ohne daß andere Massen vorhanden

[1]) H. Thirring, Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Physikal. Zeitschr. 19. Jahrg. 1918. S. 33.

sind; es müssen also auch im vorliegenden Fall innerhalb eines rotierenden Koordinatensystems die Zentrifugalkräfte als reine Trägheitskräfte im Sinne der klassischen Mechanik erscheinen. Eine Lösung des allgemeinen Rotationsproblems ist demnach von den Gravitationsgleichungen I. Art nicht zu erwarten.

Wir müssen dazu vielmehr diejenigen II. oder III. Art heranziehen. Die S. 167ff. als Lösung der Gravitationsgleichungen II. Art gegebenen Gravitationspotentiale g_{ik} sind ausschließlich durch die gesamte (im Durchschnitt gleichmäßig verteilte und ruhende) Materie des Weltalls bedingt. Verschwindet dessen Gesamtmasse, so wird der Krümmungsradius des dreidimensionalen Raumes null, und das Gravitationsfeld der g_{ik} hört, ebenso wie der Raum selbst, zu existieren auf. Die gegebenen g_{ik} beschreiben also angenähert das Gravitationsfeld der Sterne, bezogen auf ein Koordinatensystem, in welchem die Sterne im Durchschnitt ruhen[1]).

Gehen wir von diesem Koordinatensystem durch die Transformationsgleichungen:

$$(477)\qquad \begin{aligned} x'_1 &= + x_1 \cos(\omega' x_4) + x_2 \sin(\omega' x_4) \\ x'_2 &= - x_1 \sin(\omega' x_4) + x_2 \cos(\omega' x_4) \\ x'_3 &= x_3; \quad x'_4 = x_4 \end{aligned}$$

in ein anderes über, das relativ zum ersten mit der Winkelgeschwindigkeit ω' gleichmäßig rotiert, so vermögen die Bewegungsgleichungen (355) der Relativitätstheorie Aufschluß über die in dem neuen Koordinatensystem auftretenden Kräfte zu geben. Wir können die Bewegungsgleichungen, bezogen auf das rotierende Koordinatensystem, genähert in der Form schreiben[2]):

$$(478)\qquad \frac{d^2 x'_k}{dt^2} = -2\left(\Gamma^k_{14}\frac{dx'_1}{dt} + \Gamma^k_{24}\frac{dx'_2}{dt} + \Gamma^k_{34}\frac{dx'_3}{dt}\right) - \Gamma^k_{44}.$$

[1]) Man könnte dieses System als ein „ausgezeichnetes Koordinatensystem" bezeichnen, wenn man damit den Sinn verbinden will, daß in ihm die Bewegungsvorgänge im Sternsystem sich besonders einfach darstellen. Es ist jedenfalls zweckmäßig für solche Vorgänge gerade dieses Koordinatensystem zu wählen, ebenso wie es für die Bewegungsvorgänge im Sonnensystem zweckmäßig ist, das Bezugssystem durch den Sonnenmittelpunkt oder den Schwerpunkt des Sonnensystems festzulegen. Für die Naturgesetze selbst ist es kein ausgezeichnetes System, denn diese gelten unverändert in jedem System.

[2]) H. Thirring, a. a. O.

Die Feldkomponenten Γ_{lm}^{k} werden nach (323) aus den g'_{ik} hergeleitet. Letztere, ebenfalls bezogen auf das rotierende Koordinatensystem, erhalten wir mittels der Transformationsgleichungen (144) aus (413), (415), (419) und (477). Es ergeben sich bei der hier in Frage kommenden Näherung die Werte[1]):

(479)
$$g'_{14} = x'_2 \omega'; \qquad g'_{24} = -x'_1 \omega';$$
$$g'_{34} = 0; \qquad g'_{44} = 1 - (x'^2_1 + x'^2_2)\omega'^2;$$

sowie hieraus unter Beachtung von (358):

(480)
$$\Gamma_{24}^{1} = -\omega'; \qquad \Gamma_{14}^{2} = +\omega'$$
$$\Gamma_{44}^{1} = -\Gamma_{14}^{4} = -x'_1 \omega'^2$$
$$\Gamma_{44}^{2} = -\Gamma_{24}^{4} = -x'_2 \omega'^2.$$

Die übrigen Γ_{lm}^{k} sind null.

Setzt man diese Beträge in die Bewegungsgleichungen (478) ein, so folgt:

(481)
$$\frac{d^2 x'_1}{dt^2} = +2\omega' \frac{dx'_2}{dt} + x'_1 \omega'^2$$
$$\frac{d^2 x'_2}{dt^2} = -2\omega' \frac{dx'_1}{dt} + x'_2 \omega'^2$$
$$\frac{d^2 x'_3}{dt^2} = 0.$$

In dem gegen die ruhende Materie des Weltalls rotierenden Koordinatensystem treten also die gewöhnlichen Zentrifugal- und Corioliskräfte der klassischen Mechanik auf. Die auf einen Massenpunkt im rotierenden System wirkenden Kräfte sind also nicht durch eine dem Punkt selbst anhaftende „Trägheit" verursacht, sondern durch das Gravitationsfeld der gesamten Massen des Weltalls; diese Kräfte werden durch die Rotationsbewegung relativ zu den Massen ausgelöst und verschwinden mit ihr. Die sog. Trägheitskräfte haben also ihren Charakter als „Scheinkräfte" völlig eingebüßt; sie sind vielmehr den Gravitationskräften untergeordnet. Dies bedeutet einen ungeheueren Fortschritt in der Erkenntnis der physikalischen Naturvorgänge.

Da unsere Gesetze der Relativitätstheorie allgemein invariant sind, so müssen dieselben Zentrifugal- und Corioliskräfte auch auftreten, wenn das zuerst rotierende Koordinatensystem nun ruht,

[1]) Vgl. Physikal. Zeitschr. 22. Jahrg. 1921. S. 24.

und das ganze Universum gegen dieses mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotiert. Dies ist der Sinn der Aussage, daß nach der allgemeinen Relativitätstheorie ebensowohl die Erde rotieren, und der Fixsternhimmel ruhen, als auch die Erde ruhen, und der Fixsternhimmel rotieren kann. Beide Fälle sind nicht nur kinematisch, sondern auch dynamisch gleichwertig. Sie sind in Wirklichkeit nur ein Fall, der in verschiedener Art beschrieben werden kann.

Ebenso wie nun die Trägheitskräfte bei der Rotation durch das Gravitationsfeld der Sterne verursacht sind, haben wir uns vorzustellen, daß überall, wo wir Trägheitswirkungen wahrnehmen, dies Gravitationswirkungen der gesamten Massen des Universums sind (Relativität der Trägheit). Geben wir z. B. einer Kugel einen Stoß, so erfährt sie eine Beschleunigung relativ zu den Massen. Die Beschleunigung löst in gleicher Weise wie die Rotationsbewegung die von der gesamten Materie des Weltalls ausgehenden Gravitationskräfte aus. Diese wirken auf die Kugel und verursachen deren Trägheitswiderstand. Genau dieselben Gravitationskräfte müssen auch wirksam werden, wenn die Kugel ruht und das ganze Universum eine Beschleunigung relativ zur Kugel erfährt. Die durch diese Beschleunigung hervorgerufene, auf die Kugel wirkende Gravitationskraft der Massen des Universums muß durch eine äußere Kraft kompensiert werden, und diese letztere ist identisch mit der Kraft, die bei der ersten Art der Beschreibung der Kugel den Stoß gab. Wir können uns dabei vorstellen, daß während der Beschleunigungsphase das Gravitationsfeld in ähnlicher Weise induziert wird, wie „beschleunigt bewegte elektrische Ladungen ein elektrisches Feld induzieren“[1]).

Die so ausgelösten Gravitationskräfte sind bereits früher (vgl. S. 117) bei der Erklärung des Uhrenparadoxons herangezogen worden. Wir können die Bewegung der beiden Uhren A und B relativ zueinander auf zweierlei verschiedene Arten beschreiben, die beidemal denselben Vorgang, nur von verschiedenem Standpunkt aus, wiedergeben. Das eine Mal erfährt die Uhr B durch wirkende Kräfte Beschleunigungen relativ zur ruhenden Uhr A und (wie wir jetzt hinzufügen müssen) relativ zu den ruhenden

[1]) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie. Die Naturwissenschaften. 6. Jahrg. 1918. S. 700.

Massen des Universums. Das andere Mal befindet sich die Uhr *A* und das Universum in beschleunigter Bewegung, während die Uhr *B* durch dieselben wirkenden Kräfte wie vorher in Ruhe gehalten wird. Diese letzteren Kräfte heben gerade die Wirkung der während der Beschleunigungsphase auftretenden Gravitationskräfte auf.

Mit dieser zweiten Beschreibung ist diejenige identisch, die wir früher für denselben Vorgang gaben: Die Uhren *A* und *B* befinden sich zeitweise in einem homogenen Gravitationsfeld, wobei die Uhr *B* während dessen Auftreten jeweils durch eine wirkende Kraft festgehalten wird. Doch ist diese letztere Beschreibung nur näherungsweise zutreffend, da die Annahme endlicher homogener Gravitationsfelder eine Euklidische Struktur des Raumes in deren Bereich voraussetzt. Der Raum ist aber nur in begrenzten Gebieten und da auch nur näherungsweise Euklidisch.

Die hier gegebene Darstellung der Relativität der Trägheit bedarf im einzelnen noch der weiteren Durcharbeitung. Eines ist jedoch sicher. Wir dürfen sie nicht verwerfen, ohne zugleich dem Relativitätsprinzip seine allgemeinste Gültigkeit zu nehmen. Eine Relativitätstheorie, die das Gravitationsfeld der Sterne und dessen durch Rotation oder Beschleunigung ausgelöste Wirkung verwerfen müßte, wäre keine Relativitätstheorie im Sinne unseres allgemeinen Prinzips. Sie bliebe auf halbem Wege stehen. Wollte man sie nur auf die Gravitationskräfte im Sinne der klassischen Mechanik anwenden[1]), so hieße das, die Gravitationsgleichungen I. Art anerkennen, diejenigen II. bzw. III. Art aber ablehnen. Dann wäre z. B. die Rotation gar keine relative Bewegung.

Ob wir freilich die Gravitationsgleichungen II. bzw. III. Art als der Wirklichkeit entsprechend ansehen dürfen, hängt ganz wesentlich von einem Punkt ab. Die beiden letzten Arten der Gleichungen verlangen ein endliches, räumlich geschlossenes Universum[2]).

[1]) P. Lenard, Über Relativitätstheorie, Äther, Gravitation. Neue, vermehrte Ausgabe. Leipzig 1920. S. 17.

[2]) W. de Sitter (vgl. On Einsteins theory of gravitation, and its astronomical consequences. Monthly Notices of R. Astron. Society Vol. 78. No. 1. Nov. 1917) hat allerdings eine andere Lösung der Gravitationsgleichungen II. Art gegeben, die zu diesen Folgerungen nicht führt. Sie ist

Die Astronomie vermag gegenwärtig — und vielleicht noch auf lange Zeit hinaus — keine entscheidende Antwort auf die Frage nach der Endlichkeit der Welt zu geben, wenn die Möglichkeit derselben auch durchaus nicht von der Hand zu weisen ist[1]). W. de Sitter[2]) vor allem hat im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie untersucht, ob unsere astronomischen Beobachtungsergebnisse mit der Annahme einer endlichen Welt vereinbar sind und Widersprüche nicht gefunden. Er hat dabei den schon früher (S. 171) gegebenen Wert für den Krümmungsradius des Universums hergeleitet. Doch das sind erste Versuche, die, so erfreulich ihre Ergebnisse für die Relativitätstheorie sind, doch noch bedeutend weitergeführt werden müssen, und für welche das Beobachtungsmaterial nur sehr langsam gewonnen werden kann.

In gleicher Weise wie die Gravitationsgleichungen I. Art ihrer endgültigen Bestätigung harren[3]), sind wir also auch gegenwärtig nicht in der Lage, die Richtigkeit der Gravitationsgleichungen II. (bzw. III.) Art aus der Wirklichkeit nachzuweisen. Die Endlichkeit des Weltalls ist heute als eine Vorhersage der Relativitätstheorie zu betrachten, deren Wahrscheinlichkeit in dem Maße wächst, in welchem das Prinzip der Relativität aller Bewegungsvorgänge sich an anderen Erscheinungen bewährt. Notwendig aber wird es sein, diese Endlichkeit einmal aus den Beobachtungen unmittelbar herzuleiten.

Noch gilt, was H. Weyl über die Relativitätstheorie in seinem grundlegenden Werk „Raum, Zeit, Materie“ (1. Auflage) sagt, zu dessen Studium, ebenso wie zu dem der Originalarbeiten hinzu-

aber sonst physikalisch völlig unbefriedigend und soll hier weiter nicht behandelt werden. (Vgl. F. Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Nachr. der Göttinger Gesellsch. der Wiss. math.-phys. Kl. 1918. S. 394.)

[1]) Vgl. Die Naturwissenschaften 9. Jahrg. 1921. Heft 1. S. 9.

[2]) W. de Sitter, On Einsteins theory of gravitation, and its astronomical consequences. 3. paper. Monthly Notices of R. Astron. Society. Vol. 78. No. 1. Nov. 1917 und W. de Sitter, On the curvature of space. K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings Vol. 20. S. 229. 1917.

[3]) Vgl. hierzu auch: K. F. Bottlinger, Die astronomischen Prüfungsmöglichkeiten der Relativitätstheorie. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Bd. 17. Heft 2.

führen, die Absicht dieses Buches war: „Ihre eigentliche Stütze findet sie weniger in der Erfahrung, als in ihrer eigenen inneren Folgerichtigkeit, durch welche sie der klassischen Mechanik ganz erheblich überlegen ist, und darin, daß sie in einer die Vernunft aufs höchste befriedigenden Weise das Rätsel der Relativität der Bewegung und der Gravitation auf einen Schlag löst.“

Wenn auch gegenwärtig ernste Widersprüche zwischen der Relativitätstheorie und der Wirklichkeit nirgends vorliegen, so muß es doch der Zukunft vorbehalten bleiben, den Nachweis der völligen Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu erbringen.

Sachregister.

(Abkürzungen: allg. = allgemein; klass. = klassisch; Mech. = Mechanik; Rel.Th. = Relativitätstheorie; spez. = speziell; Syst. = Koordinatensystem.)

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06843 3534



